Maria Isabel Martins de Sousa

O novo Programa da Matemática do Ensino Básico como fator de aprendizagem e de inclusão

Universidade Fernando Pessoa

Porto 2012

Maria Isabel Martins de Sousa

O novo Programa da Matemática do Ensino Básico como fator de aprendizagem e de inclusão

Universidade Fernando Pessoa

Porto 2012

Maria Isabel Martins de Sousa

O novo Programa da Matemática do Ensino Básico como fator de aprendizagem e inclusão

---

Maria Isabel Martins de Sousa

Orientadora: Professora Doutora Tereza Ventura

Trabalho apresentado à Universidade Fernando Pessoa como parte dos requisitos para a obtenção do grau de mestre em Ciências da Educação – Educação Especial.

RESUMO

A presente investigação decorre de um estudo com dois anos de experimentação realizado numa turma de 1º ciclo, referente ao novo Programa de Matemática do Ensino Básico. O problema em estudo centra-se no insucesso na Matemática e a relevância de algumas das orientações metodológicas do PMEB como fator de aprendizagem e inclusão, evidenciando os processos vividos pelos alunos na realização de tarefas matemáticas de investigação, as suas interações e a forma de desenvolver uma matemática ao alcance de todos.

Palavras- chave: aprendizagem, inclusão, tarefa de investigação, trabalho colaborativo, comunicação matemática.

ABSTRACT

This research is the result of a two year study and training on the new Syllabus of Mathematics for Primary School undertaken with a group of pupils. It is a research centered upon the lack of success in Mathematics and the relevance of some of the above mentioned Syllabus' methodological indicator as a learning and inclusion factor. It also focuses upon the processes lived by the students when accomplishing mathematic investigative tasks, their interactions and the way to develop a type of mathematics that can be reached by each and every student.

Key words: learning, inclusion, investigative tasks, colaborative work, mathematical communication

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Tereza Ventura, pela condução investida e generosa que simplificou o percurso.

À equipa da DGIDC, que durante os dois anos de experimentação do novo programa da Matemática, desabotoou a vontade de aprender.

Ao meu marido, pelo companheirismo sentido.

Às minhas filhas, porque entre o centro e a periferia não penhoraram afetos.

À minha mãe sempre.

Aos meus amigos pela assiduidade nas minhas ausências.

Índice

Índice de tabelas

Índice de figuras

Índice de gráficos

Lista de siglas

APM : Associação de professores de Matemática

DGIDC : Direção- geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

EeM : Educação e Matemática

GAVE : Gabinete de Avaliação Educacional

EMR : Educação Matemática Realista

ME : Ministério da Educação

MCE : Modificabilidade Cognitiva Estrutural

NCTM : Standards do National Council of Teachers of Mathematics,.

OCDE : Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

PISA : Programme for International Student Assessment

PMEB : Programa de Matemática do Ensino Básico

PFCM : Programa de Formação Contínua de Matemática

SIAEP : Sistema Integrado de Administração de Escolas Públicas

TIMSS : Third International Mathematics and Science Study

IST : Instituto Superior Técnico

Capítulo I - Introdução

1 Enquadramento do estudo

O insucesso escolar/aversão à disciplina de Matemática tem constituído um dos tópicos centrais, no desenvolvimento escolar da sociedade portuguesa. Na qualidade de docente da disciplina é importante refletir e questionar todos os cambiantes possíveis, que afetam o nosso sistema educativo. A opinião pública tem manifestado alguma inquietação através de um descontentamento nem sempre sustentado, procurando os registos mais visíveis, neste caso o professor, ou por vezes replicando uma angustia politico/social decorrente de tentativas nem sempre bem conseguidas dos sucessivos governos que, apesar de algumas reformas, não têm alterado a dinâmica do ensino ou os maus resultados dos alunos. Ainda nesta linha de desempenho, muitos têm encontrado como denominador comum, o descomprometimento do aluno ou ainda a falta de apetência generalizada e/ou familiar.

> "Acresce que o insucesso em Matemática é aceite como normal, quer pelos pais, quer pela sociedade em geral. As dificuldades dos alunos são explicadas porque os pais ou irmãos mais velhos já tiveram problemas semelhantes ou pela origem social. Mais tarde, o motivo do insucesso passa a ser a *falta de bases* ou outra deficiência qualquer, mas raramente o professor questiona o seu ensino, os seus métodos ou a sua abordagem aos conteúdos". (Ponte, Serrazina 2000, p. 79)

Apontam-se responsabilidades a todos os agentes que, direta ou indiretamente lidam com o desinteresse nesta área, professores, psicólogos, pedagogos, pela incapacidade de driblar o insucesso e a aversão à Matemática, conotando-a inadvertidamente de *falta de capacidade.* Em causa está a resolução de exercícios em série e de solução única, que acarretam confusão e insegurança (Baruk, 1996).

A avaliação das aprendizagens realizadas por diversos estudos internacionais (SIAEP, TIMSS e PISA), de 1990 a 2000, revelou insistentemente deficiências significativas nas aprendizagens dos alunos portugueses. Em meados da década de 90, foram publicados os resultados de um estudo sobre a literacia matemática dos portugueses: são menos de 12% os portugueses, em idade adulta que aplicam, num nível desejável, operações numéricas e interpretam material impresso de uso rotineiro, como um horário, um cheque ou um anúncio. (Ponte et al., 1998; Ramalho, 1994, 1995, 2001, 2002).

A participação do nosso país em estudos internacionais de avaliação de desempenho, o primeiro em 1991, coordenado pelo *Educational Testing Service*, colocara Portugal em último lugar, num universo de 14 países. Uma outra participação, em 1995, no TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), de alunos no 4º ano de escolaridade, apresentou novamente um fraco desempenho, ficando Portugal no vigésimo terceiro lugar, deixando para trás apenas os alunos da Islândia, Irão e Kuwait; quando a frequentar o 3º ano de escolaridade, num universo de 24 países o mesmo estudo apresentou resultados que os situaram num vigésimo primeiro lugar. (Ramalho, 1994).

O estudo internacional de avaliação independente, PISA (Programme for International Student Assessment), promovido pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico), tem vindo a fornecer informações sobre o desempenho dos sistemas educativos dos países participantes. O enfoque é atribuído à capacidade que os jovens de 15 anos evidenciam em contextos pessoais, sociais e globais pela aplicação dos seus conhecimentos em análise, raciocínio, interpretação e comunicação. Em suma, pretende-se avaliar a literacia, nas diferentes áreas.

> "A literacia matemática no PISA é definida como a capacidade de um indivíduo identificar compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo." (OCDE, 2003, Gave, 2004).

A recolha de informação do estudo PISA, referente ao ano 2000, relevou o clima preocupante do ensino da matemática ao colocar os alunos portugueses no 24º lugar, entre os 27 países da OCDE, com uma média de 454 pontos na Matemática.

Os dados relativos a 2003 mostraram que os alunos portugueses, em situações de cálculo contextualizado ocupam o 25º lugar, entre os países membros da OCDE e outros, perfazendo um total de 41 países, superando apenas em competência matemática os alunos do México e da Turquia. As grandes lacunas continuam a ser as questões que implicam raciocínios mais elaborados, *matematização, pensamento matemático, generalização e perspicácia* (Ponte, 2008).

Em 2006, o desempenho global dos alunos portugueses mantém-se no indesejável, a literacia matemática atingiu o valor 466, o mesmo que em 2003. Um dado comum em todos estes estudos trienais, apresentados pelo PISA, são os níveis baixos de proficiência dos alunos que frequentam o 7º e 8º anos de escolaridade.

Dados mais recentes, relativos ao PISA 2009 colocam o nosso país na 21ª posição, num conjunto de 33 países da OCDE, com 487 pontos, mais 21 pontos que em 2006, revelando uma significativa melhoria em relação aos ciclos de análise anteriores. Comparando os resultados dos alunos portugueses com os resultados dos alunos do conjunto de países da OCDE, verificamos que Portugal foi o 4º país que mais progrediu em competência matemática, fazendo parte do grupo de países que atingiram a média da OCDE.

Quebrando o marasmo e o conformismo tão esclarecedores desta dura realidade, gostaríamos de ousar atribuir esta curva ascendente ao prefácio dum tempo, no âmbito do PMEB (Programa de Matemática do Ensino Básico), pelo Programa de Formação Contínua dos Professores, que visava preparar o terreno para a mudança. Não falamos apenas de orientações curriculares, referimo-nos com mais afinco às perspetivas de novas práticas de ensino-aprendizagem da Matemática. Mas de facto, de um ponto de vista científico, não é esta a nossa pretensão.

Num cenário preocupante entende-se ser pertinente apresentar um estudo de caso que demonstre como a atividade matemática dos alunos, resultante das orientações metodológicas subjacentes à aplicação do novo PMEB, no contexto de sala de aula, interfere com o desenvolvimento de competências e transforma estratégias de procedimentos informais em procedimentos cada vez mais estruturados, numa ótica de desenvolvimento matemático para todos. Segundo Araújo (2006), será a forma de evitar dogmas teóricos e invocar estudos mais recentes que identifiquem

> "(…) conteúdos e processos de ensino-aprendizagem que conduzam ao sucesso das aprendizagens; serem capazes de mostrar através de exemplos concretos de ensino-aprendizagem como o conhecimento pode ser transmitido pelo professor e construído pelos alunos." (Araújo, 2006, p. 189).

2 Reflexão sobre práticas

A presente investigação centra-se numa reflexão sobre práticas, após dois anos de trabalho com uma turma piloto (2008/2009 e 2009/2010) no âmbito da experimentação do novo PMEB, no 1º Ciclo. Ultrapassando qualquer dimensão hipotética, a turma acima referenciada era constituída por 20 alunos, um deles Asperger, um outro com perturbações de espectro de Autismo, com características mais marcantes, quer sociais, quer cognitivas, que o aluno Asperger, um outro com acompanhamento em pedopsiquiatria para controlo da excessiva agressividade, três alunos com défice de atenção grave, dois deles com défice cognitivo associado, um outro com DHDA e um outro com disfunções sócio-afetivas. Este grupo de alunos, agora referenciado, manteve-se na turma, também no 2º ano. Acresce a estas informações que, dos 20 alunos, 11 são subsidiados por manifesta carência económica.

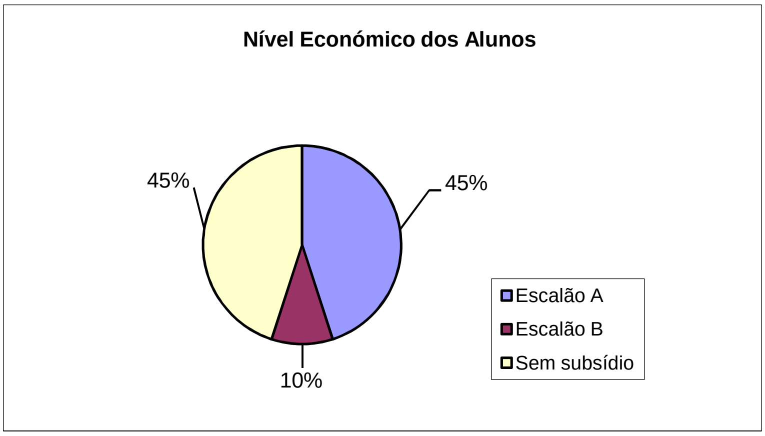


Gráfico 1: Caracterização da turma ao nível económico

Um outro indicador que coabita com a falta de recursos económicos é o baixo nível cultural dos pais. Contudo, grande parte destes pais perspetiva para os filhos um outro nível cultural, reforçando os benefícios da aprendizagem, ainda que não os possam acompanhar por falta de domínio dos conteúdos curriculares. Um outro grupo mantém uma promissora expectativa entendendo a escola como um espaço crucial de aprendizagem e de preparação para os ciclos seguintes (47%).

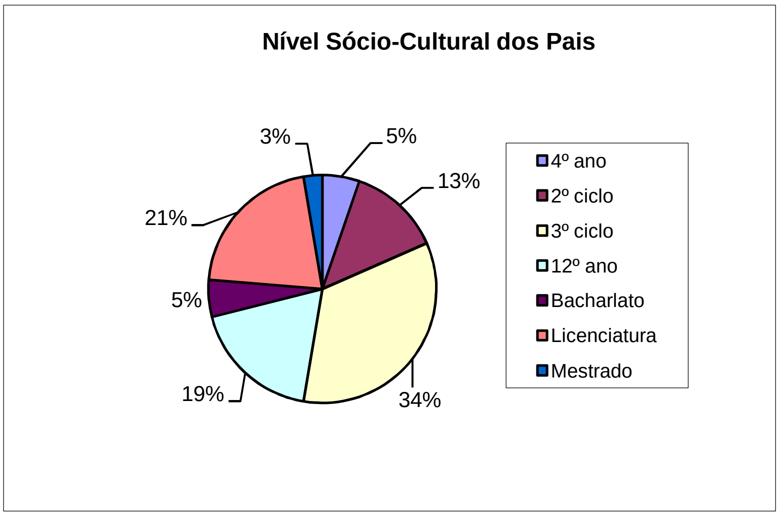


Gráfico 2: Caracterização da turma ao nível sociocultural

3 Um projeto piloto no âmbito do novo Programa de Matemática do Ensino Básico

A equipa de investigação da DGIDC (Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular) esteve fortemente envolvida e motivada em projetos-piloto, enquanto participantes ativos e colaborantes proporcionando condições favoráveis de apoio e formação, numa avaliação que conduziu a uma validação que pôde legitimar as futuras práticas pedagógicas. De relevar a perceção de todos para a motivação que os nossos atuais alunos estão a demonstrar, aprendendo mais e demonstrando especial interesse pelas tarefas de investigação matemática.

Admitindo que, de um ponto de vista institucional, exista uma avaliação dos resultados dos alunos, o presente estudo apostou na articulação de uma visão cruzada - através da triangulação metodológica de abordagens qualitativas e quantitativa - da prática profissional dos professores com os resultados dos alunos. Estes últimos articulam diferentes patamares de realização numa matemática para todos, prática da inclusão.

Com efeito, o universo de alunos da turma participou sempre numa mesma tarefa exploratória ou de investigação, em díade ou individualmente, evidenciando a vivencia de processos matemáticos, ainda que não lineares, construindo percursos alternativos, num sistema aberto de conteúdo, que levou à interação entre pares na exploração e sequente explicação de decisões tomadas em estratégias de resolução diversas. Analisando o processo de matematização ou construção do modelo matemático que representava a situação problema explorada, deparámos com previsíveis desníveis nas estratégias de resolução adotadas. Estes eram indicadores de processos matemáticos mais ou menos estruturados, elucidativos do desenvolvimento da compreensão, não só do que se pretendia mas também da capacidade de articular conhecimentos num ambiente que acionava dinâmicas imediatas no professor, ou fornecia dados para a preparação da sequência de tarefas seguinte e, em alguns casos, para a apresentação de uma tarefa não prevista inicialmente. Investigar com os alunos a razão de funcionamento de determinadas estratégias, clarificando conceitos, ajudou os alunos a construir e a enriquecer relações matemáticas e a elevar o seu grau de abstração. O enfoque foi assim dado ao ambiente matemático construído em sala de aula. (Cobb, 1997).

Conforme se tornará patente o presente estudo foi arquitetado tendo como base uma reflexão aprofundada sobre práticas, partindo da prática do investigador durante dois anos letivos e cruzando-a com as reflexões de outros professores sobre as suas práticas durante o mesmo período. Os resultados comprovaram a hipótese inicialmente formulada: o ambiente e o contexto numa sala de aula, a formação de professores e um trabalho colaborativo são contributos capazes de reduzir o insucesso na matemática, no ensino básico, e promover a inclusão.

Capítulo II – Conceção do estudo

1 Revisão da Literatura

i Literacia matemática em Portugal?

A polémica instalou-se desde há muito, pela necessidade de inverter uma realidade, que a todos compromete, socialmente e cientificamente. As competências matemáticas dos nossos alunos, equiparadas com a grande maioria dos alunos que fazem parte dos países da OCDE, leva-nos a repensar novos modelos de ensino-aprendizagem que combata qualquer perceção de inevitabilidade. Partindo desta preocupação surge uma panóplia de opiniões díspares que esgaçam costuras, de forma a delinear estratégias de ensino, que otimizem a aprendizagem da Matemática. A magnitude do problema levou para a liça não só os intervenientes diretos, professores e alunos, como outros cidadãos que percecionam que os carris preexistentes poderão ser repensados, possibilitando um percurso de ensino-aprendizagem que conduza ao sucesso educativo. Desta forma, abordar o insucesso em Matemática não pode ser analisado sob um prisma puramente técnico. (Ponte, 2003).

Jorge Buescu[1] (2003), apresentou como resultados de um *estudo sobre os conhecimentos e capacidades matemáticas dos alunos*, a carência de preparação suficiente dos alunos, nos níveis de ensino básico e secundário. Nesta sequência e no âmbito das diferentes funções cerebrais ao serviço do raciocínio matemático, o neurologista Caldas, A. C. (2006,) afirma não haver razão que justifique dificuldades na aprendizagem na Matemática, desde que o processo de aprendizagem seja pautado pelo desenvolvimento das estruturas biológicas sustentadas nas diferentes aptidões, cabendo ao docente a sensibilidade para encontrar os momentos adequados para estimular a criança.

> "Em nosso entender não há razão para que a matemática constitua uma dificuldade particular para a aprendizagem escolar. Ela corresponde, afinal, à explicitação e posterior

[1] Professor Auxiliar do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, em Lisboa

> desenvolvimento de processos cognitivos intuitivos e naturais, próprios da nossa espécie e da nossa civilização.” (Caldas, 2006, p.201).

Luísa Ferreira e Pedro Lima[2], apresentaram *estatísticas da educação* que reforçaram o quanto é preocupante o fraco desempenho dos nossos alunos, na área da Matemática. Se nos debruçarmos sobre as análises comparativas dos países membros da OCDE, ao nível da literacia matemática, verificamos que Portugal continua na cauda destes países, tendo em 2003 na sua retaguarda apenas o México, a Turquia e a Grécia. Ainda assim, foi evidenciado um progresso significativo desde o princípio dos anos sessenta, até aos nossos dias. Analisando com seriedade e preocupação esta questão, no seu estudo quantitativo do estado do ensino em Portugal, Ferreira & Lima apontam como um dos fatores de maior relevância “a pouca atenção prestada pelo sistema à formação dos professores, quer antes da sua entrada formal para o setor, quer durante a permanência naquele”. (Ferreira & Lima, 2006 p. 96).

Carlos Fiolhais [3](2006), seguindo a linha de diagnósticos, comentou os maus desempenhos matemáticos, dos estudantes portugueses, tendo concluído que este panorama educativo se reflete na faixa etária mais jovem, onde deduziu, ser premente uma intervenção capaz ao longo de todo o ensino básico, no desenvolvimento de capacidades neste domínio.

David Justino4 (2006), comentou a repercussão das perspetivas românticas, presentes no pensamento educativo português desde o século XX, nas práticas pedagógicas das escolas portuguesas. O resultado reflete a amálgama de modas assente numa instabilidade de influências de caráter curricular, programático e metodológico. Esta falta de definição é comentada pelo autor como

> “(…) entrave à aprendizagem dos alunos face à desregulação manifesta do nosso sistema de ensino. A forma como os professores apreendem estas orientações e, acima de tudo, a sua capacidade de as operacionalizar é algo que tem escapado aos próprios interessados” (Justino, D., 2006, p.

[2] Economistas no Banco Europeu de Investimento no Luxemburgo, com uma vasta experiência nos domínios económicos e educativos
[3] Físico na Universidade de Coimbra
[4] Sociólogo ,Universidade Nova de Lisboa

Dando continuidade à linha de pensamento anterior, a pedagoga Araújo[5], (2006) discute o construtivismo na educação ao pôr em causa o *construtivismo* defendido por Piaget, bem como o *construtivismo social* de Vygotsky, pela radicalidade e primazia que estas duas vertentes da psicologia têm em processos tão complexos como é o do ensino-aprendizagem, delegando para segundo plano a ciência. Defende a quebra desta dualidade: pedagogia e ciência, como forma de otimizar resultados. Propõe como investigação promissora, o estudo de métodos de ensino, em situações reais de sala de aula, que produzam resultados educacionais desejáveis.

Contudo, ignorar um número significativo de décadas de filosofia e psicologia, relacionados com o estudo do pensamento matemático, parece ser uma atitude redutora. (Amaral, 2003). No nosso entender, Vigotsky (1997) soube articular diversas e diferentes fontes de conhecimento. Desde a teoria da evolução das espécies de Darwin, com as abordagens sócio-históricas do desenvolvimento do homem, como ser individual e coletivo, foi invadindo sobretudo os domínios da linguística e da psicologia da educação. Piaget foi também pioneiro em contributos que em muito ajudaram a compreender o pensamento infantil, equiparando-o ao do adulto numa abordagem mais qualitativa que quantitativa (Piaget, 1975).

Se estas duas vertentes da psicologia (Piaget e Vigotsky), que afinal também abordam a ação do sujeito em interação com o meio e com o outro, têm sido alvo de alguma primazia nos estudos e intervenções nas salas de aula, o conhecimento científico também deverá ser sujeito ao enfoque que obrigatoriamente merece. Pedagogia e ciência de mãos dadas nas abordagens escolares contribuirão certamente para o sucesso das aprendizagens matemáticas.

Também houve quem relacionasse os maus resultados na área de Matemática com dificuldades adicionais na leitura (Morais[6], 2006), comentando realidades em que se penalizam as crianças que apesar de apresentarem uma boa capacidade de operacionalizar e raciocinar matematicamente, nem sempre apresentam uma boa prestação porque a dificuldade na leitura induziu em erro uma instrução matemática.

---

[5] Pedagoga, Instituto Superior de Educação e Ciências

[6] Psicólogo, Unidade de Investigação em Neurociencias Cognitivas, Universidade Livre de Bruxelas.

Já em 1999, Abrantes, Serrazina e Oliveira afirmavam que as competências tradicionais de cálculo ligadas à Matemática estavam muito aquém das exigências da sociedade da altura. Ser *alfabetizado* perdeu o peso que a designação outrora lhe conferia, conjunto de aprendizagens básicas de leitura, escrita e cálculo. Exige-se a mobilidade de conhecimentos, com enfoque para o uso efetivo dessas competências e não propriamente a sua obtenção (Abrantes et al., 1999).

Segundo Aníbal & Teodoro[7] (2008), as políticas educativas tem demostrado um desencontro entre políticas, governos e respetivos ciclos eleitorais. Durante o Estado Novo, a educação enquanto política pública, revestiu-se de algum obscurantismo que a colocavam em contradição com as aspirações sociais e com a economia vigente na Europa. Após o ano de 1974, segundo Correia (*cit. in* Aníbal & Teodoro 2008), os discursos educativos foram marcados por uma "ideologia democratizante e crítica". Contudo, a gestão das tensões existentes projetaram esses discursos num campo vago e sem sustentação, normativa e regulatória. As políticas educativas, essencialmente a partir da década de 90, convergem para a competitividade económica, assumida como fator essencial na modernização do país. Em meados dos anos 90, abandona-se o percurso educativo, que se pretendia paralelo às exigências do mercado de emprego, para enfatizar o consenso nacional e a participação como campo privilegiado na educação. É de referir, a falta de coerência que deixa a educação refém de ambiguidades, associando discursos construtivistas a discursos que defendem a eficiência social, numa dependência direta da produtividade económica.

> " É neste período que o hibridismo da política educativa surge mais patente. Não obstante a insistência de igualdade de oportunidades e de inclusão, transpostos para medidas como as que criam os Territórios Educativos de Intervenção Prioritária e os Currículos Alternativos, as constantes referências que aliam educação e desenvolvimento, numa lógica homogeneizante e universal de modernização, afirmam a existência de continuidade nos parâmetros fundamentais da política educativa." (Aníbal & Teodoro, 2008, pp116).

Nas últimas década as políticas educativas tem encontrado razões teleológica de múltiplas dimensões que nos têm empurrado para um complexo puzzle formativo. Racionalização, modernização, rankings, entre outros, passaram a ser os denominadores

---

[7] Diretor da Unidade de Investigação Observatório de políticas de Educação e de Contextos Educativos na universidade Lusófona.

que por vezes caminham ao arrepio da finalidade gestionária da formação. Se por um lado as políticas educativas ambicionam uma escola globalizante, visando a integração numa Europa cada vez mais competitiva, mantermo-nos num estádio intermédio argumentando especificidades nacionais mantém o registo de ume escola como um espaço público de experimentação e de múltiplas disfunções.

Em 2008 surge a Matemática como área de debate e de reflexão na conferência internacional *Matemática Ensino: questões e soluções*, da qual foram oradores de referencia personalidades portuguesas[8], que desde há muito têm demonstrado interesse por esta temática. Foram apresentados alguns dilemas no ensino da Matemática numa perspetiva de fomentar aprendizagens em práticas promissoras. Foi debatido como dicotomia ou polarização a fundamentação pedagógica cognitivista e construtivista no ensino da Matemática. O debate foi enriquecido por pareceres díspares, no âmbito de estudos científicos e da didática da Matemática, e também por pareceres marcados por algum ceticismo em relação às novas orientações curriculares (…)

> no seu conjunto, as orientações pedagógicas em destaque – objectivos, métodos, papel do professor e do aluno -, patentes nos documentos curriculares vigentes para o ensino da Matemática no Ensino Básico, não destoam das que constam em documentos curriculares para outras áreas curriculares" (Damião, 2011 pp.166).

No entanto, as conclusões do debate definem-se como recomendações validadas pela experiência, pelos estudos e pelas análises de experimentos educativos, que apontam para dois traços mais salientes, o seu ecletismo e a sua razoabilidade. (Crato, 2011)

Num outro encontro, também ele alusivo à literacia matemática, realizado com o objetivo de apresentar o livro *20 anos de temas na EeM*, da APM, refletiu-se sobre o desafio de como preparar melhor os alunos para a vida após a escola e os "contributos que a Matemática pode dar para formar cidadãos mais críticos e intervenientes." (Loureiro, 2010 p. 48). Tentou-se responder a questões que esclarecessem a ideia de literacia matemática, numa reflexão que se impõe pelo desafio enfrentado atualmente nas nossas escolas, por um currículo novo de Matemática o que pressupõe novas

---

[8] Dias A.,Fiolhais C., Thevenot C., Berch D., Geary D., Grilo E. M., Vilar E., Santo F., Oliveira F., Guimarães H., Goes J., Morais J., Viana J.P., Araújo L., Damião M.H., Festas M.I., Rosa M.C., Simões M.S., Fayol M., Crato N., Freitas P.J., Rosário P., Askey R., Siegler R., Aharoni R., Embrestson S., Reyna V., Boykin W.

orientações metodológicas, ou seja uma preocupação com a prática e um outro entendimento de literacia matemática.

ii O currículo matemático

Também neste campo, temos décadas de história que vêm de encontro a alguma falta de amenidade, que levou a questionar o ensino da Matemática e consequentemente os conteúdos curriculares. Todas as épocas foram marcadas por objetivos diferentes de aprendizagem, em consonância com a finalidade da educação, da altura. Ponte (2003), numa retrospetiva do ensino da Matemática em Portugal, reportando-se aos anos 40 e 50 afirma-os marcados pela memorização e mecanização, com fracos resultados matemáticos dos alunos.

Os anos 60 marcaram o ponto de partida, num projeto que visava implementar novas estratégias de aprendizagem assentes sobretudo na psicologia. Tiveram como interesse primeiro as *matemáticas* e as *ciências,* num programa que se pretendia mais centrado nos conteúdos e nos métodos pedagógicos. Skilbeck, (*cit. in* Connell[9],1992 p.19) identificou três aspetos que caracterizavam a reforma da altura e os quais os docentes se esforçavam por pôr em prática:

> "Encorajar os alunos a descobrir os factos e a consagrar-lhes uma reflexão pessoal, a definir os problemas e a procurar as soluções;
>
> Diversificar os métodos, combinando os trabalhos individuais, os projectos confiados a um grupo de alunos e outros métodos pedagógicos destinados a estimular o interesse dos alunos;
>
> Encorajar a expressão e a criatividade dos alunos."

Estes aspetos devem ser entendidos como uma *revolução* nos métodos e nas abordagens das aprendizagens dos anos 60. Se recuarmos até esse período, percebemos que, à data, os alunos não constituíam, como hoje, a centralidade dos processos. Segundo Connell (1992), os anos 60 trouxeram-nos uma abordagem em que a reflexão, a criatividade e participação do aluno passou a constituir um dos principais aspetos da pedagogia. Os

[9] Connell, W. F. (1980), historiador do ensino.

professores passaram a entender que as salas não poderiam continuar a ser espaço de comunicação monocórdica, de presença estática e sem diálogo.

Bento de Jesus Caraça[10] (*cit. in* Ponte 2003) já em, 1940 manifestava preocupações no âmbito da pedagogia ao fundar a Sociedade Portuguesa de Matemática, e ainda no mesmo ano a *Gazeta da Matemática*, juntamente com outros professores, ficando responsável pela secção de *Pedagogia.* Um ano mais tarde fundou a *Biblioteca Cosmos* tendo aqui publicado o livro *Conceitos Fundamentais da Matemática* popularizado pela dedicação em motivar os alunos, a compreender e a Matemática no mundo que os rodeia.

Numa perspetiva de percursos profissionais, no âmbito da procura de conceções pedagógicas, subvertendo sistemas acomodados, Sebastião e Silva[11](*cit. in* Ponte 2003),teve um papel de relevo, nas décadas de 50 e 60, pelos desígnios explícitos de mudança que iam para além dos currículos: a metodologia. Concebeu orientações metodológicas que redefinia o aluno como ser ativo e crítico, no processo de aprendizagem.

Os anos 60 foram também marcados pelo movimento internacional da "*Matemática Moderna*". Os currículos foram reformulados pelo crescente descontentamento dos matemáticos com a preparação dos jovens que chegavam então às faculdades. Contudo, os novos programas elaborados no âmbito da Matemática Moderna só foram introduzidos em todos os níveis de ensino, no início dos anos 70. Ainda assim o insucesso na Matemática persistia.

> "Os maus resultados dos alunos continuavam, bem como a insatisfação dos matemáticos. Esta situação levou a Sociedade Portuguesa de Matemática a empreender numerosos debates onde se pedia a revisão dos programas." (Ponte 2003, *cit. in* SPM 1982, p. 8).

As décadas de 70 e 80 foram caracterizadas por múltiplas discussões sobre metodologias, com avanços e recuos, com aderentes e céticos, mas sobretudo por uma perceção que a dinâmica e a interação entre os professores, os alunos e os espaços era um novo modelo que importava desenvolver. Contudo, na generalidade estas intenções

[10] Professor com vasta carreira académica no âmbito do ensino da Matemática

[11] Professor e investigador na área da Matemática

não passaram de aspirações, a prática escolar pouco ou nada se alterou. Segundo (Skilbeck, 1992) o único progresso significativo situou-se ao nível da atualização do conteúdo dos *estudos*, o que de facto é muito curto para uma *revolução* que parecia estar a emergir na década de 60. As justificações foram múltiplas. Desde sociedades em mudança, com novas exigências ao nível dos direitos sociais, às instabilidades políticas, passando pelas dificuldades orçamentais, tudo servia de argumento. Mas sobretudo, o denominador da resistência à mudança assentava na dificuldade que o mundo, e os países, tinham em perceber o impacto do novo modelo tecnológico nos desenvolvimentos curriculares e pedagógicos das escolas. Nos anos subsequentes, verificamos que os países da OCDE, mantém a viva preocupação por um ensino de qualidade, colocando a discussão nos processos de aprendizagem, nas matérias ensinadas, no meio escolar e na relação causa efeito entre estes aspetos. Realizaram-se melhorias nas práticas escolares, nomeadamente em relação a adoção de expedientes que respondessem de alguma forma a crianças com carências especiais, diminuiu a taxa de abandono, e em alguns países foi notória o progresso relativo ao nível geral de ensino. Contudo, surgem desacordos de quem direciona as soluções para a competitividade económica, outros para um bem-estar individual ou até o desafogo pessoal.

Ponte (2003) destaca o seminário de Vila Nova de Milfontes, em 1988, da iniciativa da APM, com a participação de professores e educadores matemáticos, como um passo significativo na reformulação da matéria curricular, pela influência de correntes inovadoras sobre currículo e ensino, já desenvolvidas internacionalmente, em especial as *Normas* do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1991), não esquecendo também a *Experiência matemática* de Philip Davis e Reuben Hers, 1995 (*cit. in* Ponte 2003). Surge então, uma reforma geral dos programas, no final dos anos 80, associada à reorganização dos planos curriculares, no âmbito da reforma introduzida pela Lei de Bases do Sistema Educativo. Ainda assim, segundo Ponte (2003), esta mudança não melhorou as aprendizagens dos alunos, pois as orientações ainda estavam muito veiculadas à Matemática moderna, posta em prática no período anterior e por um currículo muito extenso que não se coadunava com as 4 horas semanais de lecionação. Foi necessária uma revisão resultante num programa publicado em 1997, bem como a criação de mecanismos de apoio para a aplicação deste programa. Ainda assim, não foi bem aceite por alguns matemáticos, que dada a frágil fundamentação da crítica, vingou e estabilizou a situação do ensino secundário (Ponte, 2003). O mesmo autor ainda refere novos passos em prol de práticas de ensino e aprendizagem:

> "Um novo movimento de renovação curricular iniciou-se em 1996 com a «reflexão participada sobre os currículos», continuado pelo «projecto de gestão flexível», e culminando com a publicação, no inicio do ano lectivo de 2001/02, do Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais (ME – DEB, 2001), coordenado por Paulo Abrantes." (Ponte, 2003, p.11).

O Programa de Matemática datado do início dos anos 90, sofre um reajustamento, no âmbito dos 3 ciclos do ensino Básico, que já há muito imperava.

> "(…) valorizando a noção de competência matemática, e na forma como apresenta os temas matemáticos a abordar – o desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos, e, a necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos são algumas das razões que justificavam a sua revisão." (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p.1).

A reforma dos anos 90, trouxe-nos um modelo assente em racionais económicos, para alguns, em racionais pedagógicos para outros, com o encerramento de escolas com reduzido número de alunos e a consequente concentração em escolas de maior dimensão: a generalização do turno completo, as melhorias nos sistemas de formação e aperfeiçoamento continuado de professores e o fortalecimento das lideranças no sistema educacional, associados a uma maior participação das comunidades locais e dos governos municipais, trouxeram-nos uma nova realidade. Os programas que ficaram concluídos na década de 90, tinham subjacente a medida tomada em 1986 com o alargamento do ensino básico, em Portugal de seis para nove anos.

A OCDE, nos anos 90, refere e alerta-nos para algumas fragilidades ainda existentes como seja, um ineficiente sistema de avaliação externa. Esta preocupação é ainda hoje uma questão em aberto, continuando no centro de muitas das análises até aos nossos dias. No que, em particular se refere ao Programa de Matemática, este assunto ganhou ainda uma maior acuidade, porquanto são de todos conhecidos os indicadores que nos revelam que a fraqueza dos resultados matemáticos é uma debilidade que importa analisar com maior rigor. Temos consciência da nossa realidade social, analisadas as variáveis, nível de escolaridade dos pais em conjunto com o PIB *per capita*, justificaria o fraco desempenho dos nossos alunos.

Foi neste contexto de descontentamento com os resultados obtidos pelos nossos alunos que se debatia um movimento não só de renovação curricular, como atrás foi referido, mas também de pôr em causa práticas de ensino-aprendizagem da Matemática essencialmente marcadas pelas aulas expositivas. O PMEB surge, assim, da preocupação por um ensino de qualidade e de uma necessária revisão ao Programa de Matemática para o ensino básico dos anos 90.

Crato (2006) refere-o como aniquilador dos conteúdos curriculares em prol de princípios gerais que não são objetivamente legíveis.

Contudo, surge um outro movimento *back to basics*[12] que vem contestar o programa de Matemática de 1990/91, o reajustamento do mesmo e o Currículo Nacional de 2001.

iii O novo Programa de Matemática do Ensino Básico

O novo Programa da Matemática surge quase vinte anos depois da conclusão dos programas, na década de 90, pela necessidade de integrar a experiência e o desenvolvimento do conhecimento do ensino e a aprendizagem da Matemática, entretanto adquiridos, de forma a clarificar e a organizar o conteúdo programático nos três ciclos de escolaridade, tendo sempre presente a sua articulação. Na prática esta articulação, desde há muito preconizada, nunca funcionou, ainda que em 2001, tenha sido publicado um novo documento programático, *Currículo Nacional do Ensino Básico*, apresentando alterações significativas ao programa em vigor, nomeadamente nas finalidades e objetivos de ensino, mas também na apresentação dos temas matemáticos a ensinar. Os reajustes foram efetuados por uma equipa de profissionais do Ensino[13], que pela primeira vez em Portugal, reuniu professores de Matemática em exercício dos três ciclos de escolaridade, a quem o programa se dirigia, e investigadores em educação matemática, ao qual introduziram mudanças significativas.

Este programa foi assim delineado para os três ciclos do Ensino Básico, num documento único, pela primeira vez em Portugal, apresentando orientações globais,

---

[12] Nome atribuído ao movimento de contestação propondo um regresso ao estado anterior (Ponte, 2008)

[13] João Pedro da Ponte, Lurdes Serrazina, Henrique Manuel Guimarães, Ana Breda, Fátima Guimarães, Hélia Sousa, Luís Menezes, Maria Eugénia Graça Martins e Paulo Alexandre Oliveira.

comuns aos três ciclos e uma parte específica relativa a cada um dos ciclos, numa mesma estrutura.

Na parte comum do Programa, constam as finalidades e objetivos gerais de ensino, o conteúdo matemático, com o propósito que cada um dos temas deve ter, bem como as indicações metodológicas gerais. Na parte específica do Programa, apresentam-se as orientações relativas a cada um dos ciclos, com o propósito principal de ensino e os objetivos gerais de aprendizagem e indicações metodológicas em cada tema, bem como dos tópicos e objetivos específicos associados.

O novo Programa está organizado por ciclos estruturados em quatro grandes temas: *Números e Operações*, *Álgebra*, *Geometria* e *Organização e Tratamento de Dados*. A Álgebra ainda que surja só nos percursos alusivos ao 2º e 3º ciclo, tem no 1º ciclo, desde o 1º ano uma iniciação ao pensamento algébrico, no trabalho com sequências, na relação entre números e operações, bem como no estudo das propriedades geométricas, como a simetria. Os temas matemáticos são trabalhados em tópicos com objetivos de aprendizagem associados e indicações metodológicas específicas por ciclo, e norteados pelo propósito principal de ensino.

As capacidades transversais estão presentes em toda a aprendizagem matemática: a *Resolução de problemas*, o *Raciocínio matemático* e a *Comunicação matemática*. A Resolução de problemas assume um papel muito importante, quer pelo desenvolvimento no lidar com problemas matemáticos, quer com problemas relativos ao dia a dia ou até de outros domínios do saber (PMEB, 2007). O Raciocínio matemático envolve a formulação de conjeturas, ser capaz de as testar e numa fase mais avançada, a sua demonstração.

> "Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria." (PMEB, p.8).

A comunicação matemática envolve o progressivo domínio da comunicação oral e escrita, numa linguagem simbólica. Pretende-se que o aluno seja capaz de apresentar as suas ideias e interpretar e compreender as que lhe são apresentadas, numa discussão construtiva de ideias e saberes matemáticos. (PMEB, 2007)

As finalidades e objetivos gerais são comuns aos três ciclos, estão presentes com os principais pressupostos sobre a Matemática e a atividade matemática como domínio científico que englobam as metas de ensino propostas.

> "A Matemática não é uma ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objectos e relações abstractas. É, para além disso, uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizamos" (PMEB, p.2).

Um programa que se pretende que faça face a uma escolaridade obrigatória, deve proporcionar aos alunos uma formação que permita compreender e utilizar a Matemática em contextos diversificados,

> "Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados. Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da (…) capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos." (PMEB, p.3)

Segundo Crato (2006), a excessiva contextualização no ensino básico é uma limitação na capacidade de abstração dos alunos com sérias implicações negativas em níveis cognitivos superiores.

Contudo, neste programa é valorizada a capacidades de representação e de estabelecimento de conexões, dentro e fora da Matemática, quer no trabalho com as capacidades transversais, quer no trabalho com os temas matemáticos. (PMEB, 2007). Analisar, comparar diferentes resoluções ajuda a identificar as potencialidades, de cada uma delas. A evidência que inspira a formulação de conjeturas, o teste e apreciação do grau de generalidade dessas conjeturas e a justificação, subordina a aprendizagem ao seu significado e implica o recurso à racionalidade e posteriormente à abstração.

Um outro enfoque não menos importante é o lugar de excelência atribuído ao cálculo mental, em todos os ciclos. Também a utilização de materiais manipuláveis é aqui mencionada, essencialmente no 1º Ciclo, bem como a utilização da calculadora, em tarefas específicas, o computador e instrumentos de medida e de desenho.

Surge assim um programa que perfilha orientações para o ensino da disciplina, que destaca a resolução de problemas, visando a ligação da Matemática com a realidade, valorizando o trabalho a pares ou em grupo, numa participação ativa dos alunos na aprendizagem.

> "Deste modo, contemplam as principais recomendações da didáctica da disciplina, expressas em numerosos documentos programáticos nacionais e internacionais (APM, 1988; Cockcroft, 1982; NCTM, 1989/1991; NRC, 1989), profundamente distintas das orientações que vigoraram durante vários anos no ensino da Matemática." (Canavarro, 2010).

O PMEB pretende promover práticas evidenciando uma outra conceção do que é aprender Matemática, viabilizando para a sua concretização diversos mecanismos: professores acompanhantes, a divulgação de diversas brochuras e materiais de apoio, ao alcance de todos no site da DGIDC.

Num processo de reanálise e difusão à comunidade académica, a Associação de Professores de Matemática (APM) através do Grupo de Trabalho de Investigação (GTI), publicou recentemente, em 2010, um trabalho de investigação, resultante de uma reflexão conjunta num tempo longo, a última década, relatando resultados de experiências que os professores e formadores sentiram, no âmbito dos três ciclos do Ensino Básico, pelos desafios de mudança para o professor, inerentes à metodologia do PMEB. Apresentam o programa nas finalidades e objetivos gerais direcionados para a promoção da relação dos alunos com esta disciplina, quer ao nível pessoal quer ao nível da aprendizagem. Apresentam também os temas a serem trabalhados, enfatizando as ideias fundamentais de cada um deles, bem como as alterações adicionadas em relação a programas anteriores. Também as capacidades transversais, Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação, se destacam num processo contínuo e articulado de conhecimentos adquiridos, tendo como pano de fundo situações do quotidiano que interpelam a justificação, a compreensão e a reflexão, capaz de ser comunicada oralmente ou por escrito, quer por eles quer pelos seus pares (Ponte & Sousa, 2010).

iv O conhecimento do professor

Se o tempo, pelos seus cambiantes, nos impele para a mudança, do que se aprende e do que se ensina, também o modo como se ensina inevitavelmente é repensado, dado que vivemos um novo período de desenvolvimento curricular, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. Contudo, a mudança nem sempre é acolhida como um desafio e comodamente define-se este novo programa como “mais do mesmo”. Se é verdade que alguns conteúdos matemáticos não são “novos”, também é verdade que este novo programa exige um investimento na clarificação e aprofundamento do conhecimento do professor. E, na verdade existem tópicos matemáticos novos, que requerem formação, dispositivo que a DGIDC preparou para apoiar este processo de renovação curricular, o Programa de Formação Contínua para Professores de Matemática do Ensino Básico (PFCM).

> “Mas *andar* na formação não chega – e pode arrisco, até nem ser o mais relevante. É necessário que cada um de nós incorpore o espírito de reconhecer que precisamos de aprender mais, de querer aprender mais e de querer melhorar as práticas de ensino.” (Canavarro, 2010).

É importante um investimento pessoal, também pela existência de tópicos relativos aos quais persistem conceções erróneas que é pertinente esclarecer, de forma a tornar viável uma prática subjacente a um programa que exige orientações inovadoras e uma clara compreensão científica dos conceitos matemáticos, desde o 1º ciclo, para poder proporcionar aprendizagens matemáticas mais rigorosas. Este conhecimento declarativo, segundo Rosário (2011), permite que um professor aborde e trabalhe o conhecimento dos significados dos conteúdos. Esta compreensão pressupõe não só o saber mas também a capacidade de mobilizar o conhecimento, na resolução de novas situações. Surgem assim definidas capacidades específicas a desenvolver em cada tópico, bem como capacidades transversais presentes em todos eles. Estas orientações exigem ao professor ter em conta os conhecimentos prévios dos alunos, formais ou informais, num ambiente propício à aprendizagem, onde após um trabalho desenvolvido, haja um momento de discussão, onde se possa clarificar e atribuir significado ao trabalho efetuado, bem como a construção de sínteses das ideias principais e dos conceitos presentes.

> “O papel do professor deverá ser moldado pela intencionalidade de promover, no decurso dos contextos de aprendizagem criados, uma intervenção avaliativa reguladora e propiciadora de aprendizagem”.(Santos 2010)

Também Viana (2011) reforça o trabalho pré aula do professor, ter consciência dos conhecimentos dos seus alunos, objetivos a atingir a curto e a longo prazo, numa reflexão que se exige antes, durante e após o trabalho efetuado. Refere a reflexão conjunta de professores como uma mais-valia no combate à burocratização do ensino. Colocar esta e outras questões no 1º ciclo, implica compreender o lugar que este ciclo ocupa no panorama atual da educação. A partir de 1973, este ciclo evoluiu de período exclusivo de aprendizagens ditado pela escolaridade obrigatória, até uma escola primeira, que antecede um segundo e terceiro ciclo do Ensino Básico e culmina no final do ensino Secundário, com o alargamento da escolaridade obrigatória. Nesta perspetiva vão sendo atribuídos diferentes objetivos e finalidades, pela responsabilidade acrescida de que aprender Matemática passa desde cedo pela forma como entendemos a Matemática.

> "Aprender matemática com compreensão tem a capacidade de tornar mais fácil a aprendizagem subsequente. Ideias e conceitos bem fundamentados e eficazmente relacionados são mais facilmente aplicados a novas situações." (NCTM, 2007, p.21).

A estruturação dos conceitos ao nível do 1º ciclo foi abusivamente caracterizada, pela opinião pública, como demasiado simplista requerendo apenas dos alunos a memorização e a prática de cálculo, como se a estas atividades não fosse atribuída uma importância significativa, como a resolução de problemas, o desenvolvimento do pensamento crítico, pela capacidade de estima/aferir resultados. O demasiado tempo que este tipo de conceção prevaleceu, a deficiente formação científica dos professores e as culturas das escolas, justificam práticas e metodologias acomodadas a um saber feito, ao invés de um saber construído (Amaral, 2003).

Atualmente, a aprendizagem nos primeiros anos abandonou a papel redutor que lhe era atribuído. Crato (2011) remete para o professor dos primeiros anos de escolaridade a intervenção positiva e atempada, na aprendizagem e nas dificuldades em Matemática.

v Repensar a aprendizagem

Repensar as competências matemáticas essenciais para todos implica o conhecimento do modo como os alunos aprendem Matemática. Como tal, as investigações desenvolvidas nas últimas décadas em torno do processo de aprendizagem, adquire grande relevo. O papel do aluno passivo que armazena informação ou o papel do professor que repensa as palavras utilizadas, pela lógica de uma possível retenção por parte dos alunos, precisam ser reformulados (Abrantes et al. 1999)

> "A aprendizagem é considerada um processo de construção activa do conhecimento por parte das crianças. Estas, tal como os adultos, concebem um modelo do mundo com base nas experiências que vivem e nos conhecimentos prévios que têm. Ao entrar na escola, têm já conhecimentos informais de Matemática que não podem ser ignorados." (Abrantes et al., 1999. p.24)

O aluno atribui um significado às coisas a partir dos conhecimentos que tem, ou das próprias vivências e "não necessariamente a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas" (Abrantes et al., 1999, p.24). Esta perspetiva é reforçada também por Fontana (*cit. in* Cruz & Fonseca 1995) pela tomada de consciência de que o aluno dá significado ao que conhece, mediante a sua experiência e estes conhecimentos, muitos deles informais, ajudam o aluno a dar sentido a situações de aprendizagem, a conjeturar e a atribuir-lhes um significado. Festas (2011), defende uma metodologia diretiva, que atempadamente impede a apreensão de falsas interpretações, originados pelo método da descoberta. A ausência de treino e de um envolvimento efetivo na aprendizagem ditam os fracos resultados em Matemática (Anderson et al., 1995, 1996 *cit. in* Festas 2011)

Viana (2011) propõe como alternativa ao treino sistemático, tarefas às quais os alunos atribuam significado "o importante não é pôr os alunos a fazer exercícios de Matemática, o importante é pô-los a fazer matemática". Este significado, segundo o mesmo autor, advém das situações propostas que tenham algum significado para os alunos. Esta perspetiva de aprendizagem coloca ao professor novas exigências. Assim, segundo estes autores, "a aprendizagem requer o envolvimento das crianças em atividades significativas". Não faz sentido expor à criança novos conhecimentos se elas não tiveram oportunidade de os vivenciar anteriormente. Dificilmente as crianças aprendem se não se envolverem "num processo de reflexão sobre essas actividades". Outro aspeto importante relativo à aprendizagem, refere o papel do professor na criação de um ambiente capaz em que as crianças se envolvam nas "actividades adequadas ao desenvolvimento dessas capacidades". A compreensão, o raciocínio e a resolução de problemas nas atividades dos alunos, deverão ser elementos sempre presentes.

> "(…) as competências dos dois tipos – conhecimentos de termos, factos e procedimentos, por um lado, e capacidade de raciocinar e resolver problemas, por outro – se desenvolvem ao mesmo tempo e apoiando-se umas às outras. (Serrazina et al. 1999. p.26)

Sebastião e Silva (1964, *cit. in* Ponte 2003) defendia a modernização do ensino da Matemática, quer ao nível curricular, quer ao nível da metodologia de ensino. Preconizava um papel ativo do aluno numa interação com o professor, cuja orientação levaria o aluno à descoberta de conceitos e sua definição. A aprendizagem processa-se gradualmente, quer em compreensão, quer em aperfeiçoamento, pela relação de conhecimentos adquiridos a novas situações mais exigentes. Também o erro faz parte do processo de aprendizagem, proporcionando contextos que podem enriquecer momentos de aprendizagem. Ainda segundo os mesmos autores, a aprendizagem está relacionada com os aspetos afetivos não sendo somente uma questão cognitiva

> "(…)se está intrinsecamente motivado para realizar a tarefa, se realmente a valoriza, mais facilmente aceitará correr riscos para melhorar o seu trabalho e mais provavelmente se envolverá na exploração da situação e na compreensão daquilo que ela envolve."(Serrazina et al., 1999. p.27).

Um outro fator que facilita a aprendizagem refere-se à conceção que os alunos têm sobre a Matemática bem como a consciência do seu papel como aluno de Matemática. Desmistificar a Matemática como a ciência do certo e do errado e valorizar os processos de raciocínio bem como a persistência numa prática pela descoberta. Todos estes aspetos atrás referidos estão interligados e não poderão ser analisados isoladamente. Eles fazem parte do ambiente e contexto de uma aula de Matemática.

> "Se a norma é valorizar o envolvimento em processos de pensamento, assim como o raciocínio e a argumentação lógica, pode criar-se uma "cultura da aula de Matemática" muito diferente daquela que valoriza as respostas rápidas e certas". (Abrantes et al., 1999. p.26)

vi Fundamentação da Psicologia do Desenvolvimento: cognitivista e construtivista

Nas últimas décadas, a Psicologia do Desenvolvimento foi revelando processos de aprendizagem, após anos de investigação, de algumas controvérsias mas também de acertos que geraram ferramentas às quais como educadores não podemos ficar imunes.

As duas escolas mais marcantes foram a aprendizagem associacionista cuja visão da aprendizagem é a associação entre estímulo (impressões sensoriais) e resposta; e a aprendizagem cognitiva cuja visão da aprendizagem revela um somatório de perceções e reorganização das mesmas, o que permite ao aprendiz envolver-se em novas relações e adquirir uma compreensão elementar de um tema. Em paralelo com estas duas escolas existiam teóricos comportamentalistas e os gestaltistas, que Spritnthall (1998) define ao relacionar os comportamentalistas com os associacionistas, enquanto os gestaltistas defenderam sempre a mesma causa que os cognitivistas. As duas escolas tiveram como principais representantes, F. Skinner, comportamentalista e J. Bruner, cognitivista, ambos direcionaram muito das suas investigações para implicações em ambientes facilitadores de aprendizagem, nomeadamente na sala de aula.

Nas últimas décadas, a abordagem cognitiva da aprendizagem empreendeu novas investigações. A *Psicologia Cognitiva* debruça-se numa primeira fase sobre o estudo do fenómeno da memória, discernindo o seu campo de estudo na memória de curto e longo prazo, os processos de controlo, a atribuição de significado e a aplicação dos mesmos e mais recentemente a preocupação em definir a cognição através do modelo de processamento de informação (Kirby & Jarman, 1979, *cit. in* Cruz & Fonseca 2002). Este processo será melhor compreendido se compreendermos a *modificabilidade cognitiva estrutural* (MCE), introduzida por R. Feuerstein ao combater o estigma de que as crianças com dificuldades de aprendizagem ou portadoras de deficiência como incapazes de acompanhar uma tarefa e muito menos aprender (Fonseca, 2007). Segundo Festas (2011,) a forma como se recupera a informação necessária ao pensamento matemático parte de dois saberes, o *declarativo* e o *procedimental*. O primeiro refere-se aos factos ou conhecimentos que podem ser construídos pelo próprio aluno. Os procedimentos requerem uma atitude mais ativa, a ação com recurso a analogias. O tempo que determina esta ativação depende da forma como foram aprendidos os factos, ou seja os conhecimentos e habilidades deverão ser treinados. Caso contrário, ainda segundo a mesma autora, os alunos em confronto com problemas cognitivamente mais complexos esgotam as capacidades da sua memória de trabalho em busca de soluções.

A MCE desmonta verdades feitas na medida em que cada criança é um ser único, com capacidades únicas, abertas a estímulos exteriores, capazes de se adaptarem cognitivamente ao ambiente de aprendizagem envolvente (Fonseca, 2007). A aprendizagem resulta do trabalho organizado pelo professor e do empenho dos alunos que se sobrepõe à inteligência ou até à aptidão para a Matemática (Crato, 2011). Este ambiente torna-se seminatural, na medida em que ele é cuidadosamente previsto pelo professor. Parece não ser descabido falar também de interações sociais que tão explicitamente foram estudadas por Vygotsky (1995), no sentido de investigar a influência dos fatores sociais na cognição. Estudos mais recentes vêm dar consistência a conceitos e processos de Vygotsky, nomeadamente à aprendizagem na *zona de desenvolvimento proximal*. Este processo, que enfatiza a criança como aprendiz ativo, delimita o que a criança é capaz de fazer de forma autónoma e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela resolução de problemas sob a orientação de um outro mais capaz. Este outro poderá ser um colega ou o professor, contudo o mediatizador assume sempre um papel importante nas aprendizagens, o que pressupõe que seja um ser afetivo, atento, diligente, competente e com uma intencionalidade bem definida.

No âmbito das interações, (Feurestein, 1980,1986, *cit. in* Fonseca 2007), distingue dois tipos de aprendizagem. A aprendizagem por exposição direta e a aprendizagem por experiência mediatizada. Na aprendizagem por exposição direta o aluno capta e responde a um estímulo E --- O, base das teorias conexionistas de aprendizagem ou a interação assume um papel único ao qual o aluno pelo confronto responde E --- O --- R (estímulo-organismo-resposta), base da teoria piagetiana. Na aprendizagem por experiência mediatizada, o mediatizador assume um papel de relevo E --- H --- O ---H --- H (estímulo – mediatizador – organismo – mediatizador - resposta).

> "Na experiência de aprendizagem mediatizada, os estímulos não existem só por si, eles são filtrados, modulados, mediados, intercedidos, repetidos, reforçados, eliminados, etc., consoante as necessidades introduzidas e reguladas pelo mediatizador". (Fonseca, 2007, pp 69)

Assim estes estímulos surgem numa relação atenta com o ambiente criado na sala de aula, com a qualidade de outros estímulos, mas sempre envolvidos de significado.

O estudo experimental realizado por Fonseca em três instituições: a escola C+S de Francisco de Arruda, o FORPESCAS e a CERCIMOR, vieram a demonstrar que a capacidade de pensar não é inata, as funções cognitivas desenvolvem-se mediante uma mediatização continua. O ensino expositivo não é suficiente para desenvolver a capacidade de aprender a aprender. Ainda que não fosse intenção apresentar trabalho diferenciado na turma, evidencia-se o respeito pelos atributos cognitivos singulares, bem como o seu potencial de aprendizagem promovendo a *propensibilidade da sua modificabilidade*. (Cruz & Fonseca, 2002).

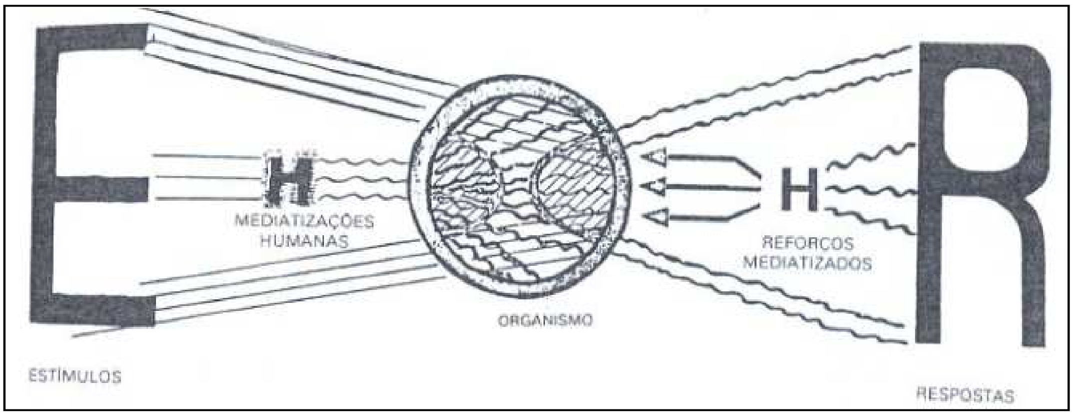


Figura 1: Modelo de experiência de aprendizagem mediatizada (Fonseca, 2007, pp 69

A tarefa matemática preconiza um envolvimento através da atenção seletiva, capaz de envolver a capacidade de triagem e processamento de informação de forma a moldar a informação contida na tarefa a esquemas retidos ou armazenados na memória a longo termo (Kirby & Williams, 1991, *cit. in* Cruz e Fonseca 2002). Neste contexto, poderemos falar de metacognição, que abarca o conhecimento consciente do aluno e seleção da estratégia apropriada, entre outras (Ashman et al.,1990[a]; *cit. in* Cruz e Fonseca 2002).

Não será demasiado ambicioso, depreender que a tarefa de investigação matemática proporciona estratégias que levam todos os alunos a pensar numa mediatização cuidada e atenta no intuito de modificar a estrutura cognitiva. Apoiados na investigação de Feurestein (1975, *cit. in* Fonseca 1998 e 1991; 1989 e 2007), cabe ao educador proporcionar aos seus alunos ambientes propícios à aprendizagem, tendo consciência de que o ser humano é modificável, daí a pertinência de uma *intencionalidade positiva* no aluno, levada a cabo também pela motivação intrínseca do professor que cria estratégias de intervenção dinâmicas cujo objetivo central é a modificação estrutural das suas competências.

Nas últimas décadas, a investigação tem contribuído com novas abordagens que têm levado à convergência de diferentes ramos da ciência (Amaral, 2003). O cognitivismo foca o seu estudo na formação de conceitos, na resolução de problemas complexos e na relação entre aprendizagem, numa perspetiva cognitiva e construtiva. Ainda que durante algum tempo a comunidade científica não tenha entendido com rigor o trabalho de Piaget, ele foi desenvolvido num longo período de tempo (1918-1977), alicerçando as bases da perspetiva construtivista. Atualmente a visão de que a realidade não é entendida diretamente pelo individuo, mas pelas interpretações dessa realidade que são entendidas e mediadas pelas estruturas interpretativas que desenvolve, passou a ter nova relevância. (Amaral, 2003).

vii Trabalho dos alunos em sala de aula: trabalho cooperativo ou trabalho colaborativo?

Abordar o trabalho cooperativo e colaborativo não nos afasta muito da sinonímia, quando nos reportamos à interação positiva resultante de momentos de trabalho, em verdadeiras comunidades de práticas, capazes de interligar estruturas cooperativas de trabalho com socialização e simultaneamente construção e desenvolvimento.

Cooperativo, *adj*. Que coopera; em que há cooperação. Cooperação, *s.f.* acto de cooperar; colaboração; solidariedade. (Editora Dicionários, sd)

Colaborativo, adj. Trabalho em comum com outrem na mesma obra;…; cooperar. (Editora Dicionários, sd)

Há quem associe as comunidades de práticas a determinados profissionais, como o caso dos professores, num projeto que há muito vem sendo preconizado, pelo combate ao trabalho solitário, privilegiando a criação de espaços e momentos da partilha, da reflexão e de balanços que promovam uma sociabilização construtiva, transferindo as experiências e conhecimentos, da posição individual para uma posição de comunidade, (Eckert, 1993).

Trabalho cooperativo pode assim estar associado a situações em que os intervenientes se proponham trabalhar de forma a atingir um objetivo comum, na planificação de tarefas num espaço de tempo determinado. Cada interveniente constrói a parte de um todo, em lógicas parcelares assentes em modelos sistémicos. O trabalho colaborativo, por outro lado, pode ser caracterizado por um conjunto, em que todos os intervenientes trabalham em simultâneo numa mesma tarefa, ou seja numa situação de permanente interação sem fronteiras evidentes das várias parcelas. As tarefas são assim desenvolvidas em grupo, com recurso à argumentação, à negociação, à execução de tarefas e à concretização, ou não, dos objetivos propostos (Littleton & Häkkinen, 1999). Deste modo entendemos que a noção de grupo e de interação é uma constante em ambos os casos. A diferença em nosso entender situa-se na construção dos modelos pedagógicos em cada um dos processos.

A colaboração é um processo largamente indefinido e só compreendido por aqueles que participam em trabalhos colaborativos (Christiansen, et al. 1997; Little, 1990). Associado a estes termos, colaboração e cooperação, também surge um outro "colegialidade". Para Hargreaves (1998), a utilização de *colaboração* e *colegialidade* define uma mesma realidade, a dificuldade reside apenas na utilização de colaboração ou cooperação, pela diversidade de formas que pode assumir:

> "(…) ensino em equipa, a planificação em colaboração, o ensino em par pedagógico, as relações de mentores, o diálogo profissional e a investigação-acção, para referir apenas algumas." (p.211)

Boavida & Ponte (2002), distinguem *cooperação* e *colaboração* a partir da análise dos termos *operare* (operar) e *elaborare* (trabalhar) defendendo que "operar é realizar uma operação, em muitos casos relativamente simples e bem definida" (…) "trabalhar é desenvolver actividade para atingir determinados fins; é pensar, preparar, reflectir, formar, empenhar-se" (p.46). Seguindo a mesma linha, Stewart (1997) utiliza o termo *colaboraçã*o ao descrever um processo abrangente, de elementos que provêm de experiências profissionais diversificadas trabalhando em conjunto, como pares, visando benefícios mútuos.

Quando pretendemos abordar o trabalho dos alunos em sala de aula, que terminologia aplicar? Trabalho colaborativo ou trabalho cooperativo?

Para Panitz (1996), a diferença entre estes termos situa-se no foco do controle. Enquanto a cooperação possui um centro controle, ou seja é controlado por alguém (um professor, um pesquisador, uma autoridade) com um objetivo específico. Na colaboração o controle reside no próprio grupo, ou seja o grupo é em si o símbolo da autoridade. Assim, na colaboração cada elemento participa na maioria das decisões: escolhe a meta, define estratégias e tarefas, avalia resultados; e todo este processo é feito com sentido de responsabilidade de quem traz benefícios para o grupo.

Poderemos então concluir que o trabalho dos alunos na sala de aula, é um trabalho cooperativo?

Verificamos que a utilização de trabalho cooperativo ou colaborativo, não parece ser merecedor de acentuada distinção, no que diz respeito à nomenclatura, quando se dirige ao trabalho dos alunos, em sala de aula, porquanto entendemos que existem diferentes abordagens destes conceitos. Se Littleton & Häkkinen (1999), parecem formular uma distinção entre *trabalho cooperativo e trabalho colaborativo,* direcionando este último para o trabalho dos alunos em contexto de sala de aula, outros há que ao referirem-se ao trabalho de grupo dos alunos, auferem-lhe um papel também ele importante, no desenvolvimento da comunicação e da sociabilização, usando o termo *interação*. Para Lave & Wenger (1991), a dimensão social é uma condição intrínseca à aprendizagem, concebida como um processo de tornar-se membro de uma comunidade. No caso específico da Matemática, tornar-se membro de uma *comunidade matematizada* (Fernandes, 1998, p. 31) é o pré-requisito mais importante para aprender. Segundo o mesmo autor, além de favorecer a aquisição de competências matemáticas, a aprendizagem cooperativa também leva a um autoconhecimento, e também a um conhecimento dos outros e das interações sociais. Os alunos sentem a sua própria evolução e a sua responsabilidade na evolução dos colegas, tornando a participação/ descoberta mais efetiva e gratificante.

As interações sociais ganharam terreno, na década de 70 pelo promissor papel no desenvolvimento cognitivo dos alunos, em grande parte, por influência da teoria *piagetiana.* Assistiu-se a um recrudescimento deste interesse pelos contributos de Vygotsky (1962, 1978, 1981, 1985), que defendia como fator de aprendizagem a interação com um par mais competente. Se é certo que depreendemos que este autor aludisse para esse papel o professor ou um outro adulto, também é certo que esta perceção o levou a atribuir ao trabalho colaborativo, em sala de aula, a melhoria de desempenhos, em pares ou em pequenos grupos, desde que com pares mais competentes. Contudo, sejam as díades simétricas ou assimétricas, a progressão é da mesma forma notória quer no sujeito mais competente quer no menos competente, (César, 1998, 2000). Assim em tarefas de tipo *quase-experimental,* em contextos matemáticos (César, 1994; César, Perret-Clermont & Benavente, 2000) deram a possibilidade de explicar resultados da interação entre pares, identificando o papel dos diversos elementos, nesse processo, como seja o tipo de tarefa, apresentação e orientação do trabalho. A verificação da dinâmica que emerge de um trabalho colaborativo fez destacar competências que os próprios alunos desconheciam, ao nível da Matemática. Atualmente, este projeto começa a estender-se a outras ciências, pelas potencialidades reveladas no trabalho colaborativo e pela implementação de ambientes mais inclusivos (Barata, Melro & César, 2001; Borges & César, 2001; Correia & César, 2001).

É certo que muitas investigações têm sido feitas na área da aprendizagem cooperativa. Dillenbourg et al. (1996), defendem a abordagem dos construtivistas sociais, a abordagem sócio-cultural e a abordagem da cognição distribuída, como referenciais teóricos que sustentam parte da investigação. A abordagem do construtivismo social defende a forma como a interação com os outros, influencia a atividade individual e leva ao domínio de novos conhecimentos. Também um bom nível de desenvolvimento individual proporciona a participação em determinadas interações sociais que produzem novos estádios de desenvolvimento, possibilitando interações sociais mais sofisticadas e assim sucessivamente. Logo, indivíduos num mesmo nível de desenvolvimento cognitivo, mas possuindo perspetivas diferentes de uma determinada situação, gera um confronto na interação capaz de levar a benefícios, de ambas as partes. Enquanto a abordagem do construtivismo social se centra no desenvolvimento individual pelas interações sociais, a abordagem sócio-cultural centra-se na relação causal entre as interações sociais e a mudança cognitiva individual (Dillenbourg et al., 1996). Esta abordagem, tem como principais referências, a teoria de Vygotsky (1962,1978), os escritos de Wertsh (1885,1993) e Rogoff (1984). As duas abordagens atrás apresentadas referem como fator positivo as diferenças nos coparticipantes. A abordagem da cognição distribuída apresenta uma forte relação com a teoria da "cognição situada" (Lave, 1988). Segundo esta teoria a primazia é atribuída ao ambiente como parte integral da atividade cognitiva. A ênfase é atribuída às comunidades sociais em que os intervenientes participam e colaboram. Esta abordagem põe em causa as duas anteriores pela forma como foram construídos, assentes numa separação entre o social e o cognitivo (Perret-Clermont et al., 1991). Ou seja a abordagem da cognição distribuída centra-se no plano social, onde as conceções emergentes são analisadas como uma produção do grupo. Tradicionalmente, as investigações da cognição humana centravam-se na resolução individual de problemas contudo, estudos mais recentes consideram esse foco insuficiente para percecionar o pensamento em todas as suas vertentes, e alargaram o campo de estudos para cenários da vida real e nas interações sociais. Assim, tem vindo a crescer o interesse pelo papel da argumentação, da contradição e da negociação de processos de raciocínio. A abordagem do sistema cognitivo como um sistema social, leva a comunidade científica cognitivista a uma maior abertura, reconhecendo que o conhecimento é distribuído entre os vários elementos cujas interações determinam decisões e soluções de problemas (Resnick, 1993). Contudo, também é sabido que a "invenção colectiva de conhecimento", não resulta com o mesmo significado em todos os grupos. Hatano & Inagaki 1993), distinguem dois tipos de interação: interação vertical, em que um elemento tem mais capacidades que o(s) outro(s), e interação horizontal, em que os elementos do grupo apresentam um mesmo nível de conhecimentos. Segundo estes autores na interação horizontal, os alunos sentem –se mais seguros, mais motivados porque não se prevê uma resposta imediata à questão inicial. A segurança sentida está relacionada com a consciencialização de que as suas ideias irão ser analisadas e elaboradas pela interação. Poderá colocar-se a questão: Como é que o grupo poderá construir conhecimento se à partida, individualmente não seria capaz? A construção do conhecimento é dinâmica e dialética (Browel & Carriger, 1993), ainda que o desenvolvimento individual não possa ser analisado fora do contexto específico onde a atividade se situa, os contextos também não serão compreendidos se não conhecermos as características de cada elemento e a forma como essas características influenciam os processos sociais e por conseguinte o desenvolvimento. A perspetiva de Lave (1988) sobre a aprendizagem, também aborda a cognição distribuída, "a cognição é distribuída – não dividida – entre mente, corpo, actividade e cenários culturalmente organizados (e que incluem outros actores)" (p.32).

Também Vigotsky (1978) abordou a cognição distribuída, ainda que lhe não atribuísse esse nome. Nos seus trabalhos atribuiu maior ênfase às interações sociais verticais, partilhando do mesmo sentido de Hatano & Inagaki (1993), na interação adulto/criança. Contudo, segundo estes autores, este tipo de interação não será a melhor forma para observarmos a cognição distribuída. No entanto quando percorremos os estudos vygotskianos para a educação deparamos com muita frequência com a questão sobre o papel das interações nos grupos.

viii A comunicação matemática

Em todo este processo, a comunicação assume um papel de destaque pela explicação e negociação de significados, própria de uma prática conjunta e exploratória. A argumentação tende gradualmente a ser aperfeiçoada pela aquisição de uma linguagem cada vez mais matemática.

Parece evidenciar-se uma outra perspetiva do que é aprender Matemática. "Aprender Matemática é construir relações matemáticas, negociar os significados matemáticos com os outros, e reflectir sobre a sua própria actividade matemática." (Wheatley, 1992, *cit. in* Reynolds & Wheatley, 1996, p.186).

A este propósito, a Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, no primeiro semestre deste ano, debruçou-se sobre o tema a Comunicação no Ensino e Aprendizagem da Matemática, evidenciando o trabalho colaborativo em matemática, o envolvimento dos alunos em tarefas de caráter exploratório e investigativo, a comunicação em grupos com alunos com necessidades educativas especiais e o papel dos gestos na comunicação. Deu-se assim enfoque ao papel dos alunos na comunicação matemática e na regulação das aprendizagens, bem como o repensar das práticas comunicativas dos professores e dos futuros professores. (Domingos, 2010).

A Matemática é assim um modo de pensar/comunicar, após explorações e observações que podem levar à generalização a partir de casos concretos, capaz de conjeturar uma regra. Esta capacidade implica a descoberta de uma lógica. Há contudo situações em que as conjeturas são falsas, o aluno depara com contraexemplos que o faz rejeitar a hipótese formulada. Este processo de procura e descoberta do que há de invariante que legitime ou valide ou que a faça abandonar uma conjetura, desenvolve a sua competência matemática. Todo este processo não se limita à presença de elementos cognitivos, esta competência advém do envolvimento do aluno neste tipo de atividade e na conceção do que é válido em Matemática, não é o facto de igualar procedimentos do manual ou até do professor, mas da argumentação lógica e consistente apresentada (Oliveira et al. 1999). E é nesta capacidade de clarificar, de argumentar, atribuindo significado à sua conjetura que encontramos a simbiose comunicação e aprendizagem.

O PMEB (2007, p. 9) atribui um lugar de destaque à comunicação na aula de Matemática.

> "Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios pelos seus colegas. Através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem matemática."

O entendimento segundo Voight (1994) da perceção do significado matemático pode ser definido de forma explícita, quando os participantes apresentam e defendem a sua ideia, ou de forma implícita quando os participantes moldam as suas intervenções ou realizações à avaliação das expectativas ou das reações do outro. Há aqui um claro empenho em ir ao encontro da estratégia que encontrou eco na compreensão do aluno, ou numa busca de clareza que explique a fiabilidade do resultado. Todo o trabalho tem como ponto de partida o sujeito, só assim é possível compreender a conexão entre interação social e aprendizagem, tendo sempre em conta o entendimento como uma negociação entre professor e alunos como unidade de análise. Segundo ele, o objetivo de toda a aprendizagem matemática é a resolução com compreensão de problemas matemáticos. As estratégias daí emergentes devem-se às expectativas do professor, ao prazer motivacional da descoberta ou ao seu mundo experiencial?

Evidenciando o professor como ator principal no desenvolvimento do saber matemático das crianças e recorrendo ao constructo de *zona de desenvolvimento proximal* de Vigotsky (1978, referido por Hoyles, 1992), Hoyles refere o papel do professor e dos colegas como um ajuste capaz de processar o conhecimento matemático pela interação social.

A comunicação é pois um processo matemático de dimensão transversal, que permite a construção de novos conhecimentos, através da partilha e negociação de significados (Sierpinska, 1998). Neste sentido, pensar a comunicação ultrapassa a linguagem, entendida como um "mecanismo através do qual os professores e os alunos procuram em conjunto expressar a sua compreensão matemática" (Pirie, 1998, p.8). Durante algum tempo, até meados da década de 1990, parte dos estudos realizados na área da educação matemática, centrava-se na questão da linguagem, ou seja no sistema linguístico (Sierpinska, 1998). A partir daí o estudo centrou-se no discurso. Neste sentido Steinbring et al. (1998), defendem que as questões essenciais para investigar "giram em torno do discurso matemático em vez da linguagem matemática, e sobre os processos de comunicação interativa na aula" (p.341). O enfoque no discurso é influenciado pela corrente interaccionista (Bauersfeld, 1994; Bauersfeld et al., 1988), para quem a Matemática é uma prática social e o conhecimento tem um caráter discursivo, sustentado na negociação de significados. Logo, saber Matemática é função das características da comunicação e das interações em que o aluno participa no processo de aprendizagem (Sierpinska, 1998). A forma como a interação se processa desvenda as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos (Wood, 1998). Na perspetiva de significados partilhados, pela negociação, as interações podem assumir a forma de regularidade ou seja de *padrão de interação* (Bauersfeld et al., 1994). Estes padrões de interação são construídos por professor e alunos, desde as primeiras semanas de escola, através do estabelecimento de normas e procedimentos. Os padrões de interação que têm sido apresentados por investigadores são*: recitação, extractivo, discussão, funil* e *focalização* (Bauersfeld, 1994, Godino & Llinares, 2000; Voigt, 1985; Wood, 1998 *cit. in* Menezes 1996)).

Numa aula baseada na exposição do professor, surge com frequência uma componente de perguntas teste (Menezes, 1996). Surge aqui o padrão de recitação (Wood, 1998)

1. O professor inicia com uma questão

2. O aluno responde;

3. O professor avalia a resposta do aluno.

O *padrão de extracção* (Voigt, 1985) evidencia também a presença do professor. A interação ocorre em três fases:

1. O professor propõe uma tarefa ambígua e os alunos apresentam diversas respostas que o professor avalia previamente;

2. Se as respostas apresentadas são muito diversificadas, o professor guia-o através da formulação de questões, com as quais extrai pequenas "doses de conhecimento";

3. O professor e os alunos refletem e avaliam o resultado obtido.

O *padrão de discussão* (Voigt, 1985) apresenta um processo enriquecedor em termos interativos. O ponto de partida é a apresentação de uma tarefa de natureza problemática, em que o professor assume o papel de regulador do discurso e em que os alunos apresentam, argumentam e negoceiam as suas ideias.

> 1. Os alunos resolvem, normalmente em pequenos grupos, uma tarefa de natureza problemática proposta pelo professor;
>
> 2. O professor pede a diversos alunos, dos diversos grupos, que apresentem a solução encontrada e que a expliquem aos colegas;
>
> 3. O professor, à medida que os alunos apresentam as suas ideias, coloca questões visando a clarificação dos processos;
>
> 4. O professor pergunta a outro aluno que apresente a sua solução e o processo recomeça, visando a procura de uma solução negociada e consensual.

O padrão de *focalização* (Wood, 1998) é idêntico ao de discurso. Contudo o professor interfere perante as dificuldades dos alunos, no sentido de os ajudar a resolver o problema fornecendo algumas pistas e deixando que os alunos façam o resto do caminho sozinhos.

> 1. O professor coloca um problema com um certo grau de dificuldade.
>
> 2. Perante as dificuldades evidenciadas pelos alunos, o professor formula questões com o intuito de enfatizar alguns aspetos do problema, focalizando a atenção dos alunos;
>
> 3. O professor permite que os alunos resolvam o problema, incentivando o raciocínio e a comunicação das ideias entre colegas.

O professor, defrontado com dificuldades na realização de uma tarefa, pode decidir acompanhar os alunos em toda a resolução, o que leva a emergir o padrão funil Bauersfeld, 1994; Voigt, 1985; Wood, 1998).

> 1. O professor coloca um problema aos alunos;
>
> 2. Os alunos mostram dificuldade em o resolver;

3. O professor vai formulando questões, de grau de dificuldade menor, de modo a que as respostas conduzam à resolução do problema.

A forma como decorrem estas interações indicia diferentes tipos de ensino e de aprendizagem da Matemática, assumidos pelos participantes (Wood, 1998). Por isso torna-se cada vez mais importante analisar os modos de comunicação que ocorrem na sala de aula, pois estes modos representam conceções não só sobre a comunicação matemática e a implicação desta na aprendizagem, repercutindo-se na organização do ambiente de sala de aula, no tipo de tarefas propostas e nos papéis desempenhados pelo professor e alunos, nomeadamente em termos discursivos (Brendefur & Frykholm, 2000). Estes autores distinguem quatro tipos de comunicação matemática: *unidireccional; contributiva; reflexiva; instrutiva*. Os três primeiros traduzem um processo monológico intercalado com diálogo de pergunta/resposta. Com o terceiro a interação representa uma atividade reflexiva dos alunos. Na *comunicação unidireccional* o papel do professor é dominante pelo sentido expositivo, e o dos alunos meros ouvintes, capazes de reproduzir o conteúdo. Na comunicação *contributiva,* dada a característica mais dialógica, os alunos são solicitados a participar com pequenas contribuições, durante a aula. Comparando esta comunicação com a anterior a diferença é apontada como de tipo mais quantitativo que propriamente qualitativo. Na comunicação *reflexiva,* o diálogo e a prática emergente adquirem, em determinados momentos da aula o perfil de discussão evidente. Na comunicação *instrutiva, o papel central* corresponde a uma meta-comunicação que o professor usa para regular e monitorar o decorrer da aula.

ix Perspetivar uma realidade promissora na aprendizagem da Matemática

Atualmente, a preocupação com esta temática, mantém-se em temas de inúmeros estudos e investigações. As transformações sociais ditam a aquisição de competências como *performance* para ingressar num mundo profissional cada vez mais competitivo. O aumento da escolarização, se por um lado facilita o acesso de todos ao saber, levará também a uma triagem pelo conhecimento. Nesta mudança social contínua é necessário alterar os nossos quotidianos escolares, bem como as metodologias que promovam um ensino reflexivo e com significado. Segundo Herbert Simon, investigador em psicologia cognitiva, o significado de "conhecer deslocou-se de ser capaz de repetir informação para ser capaz de a usar." (Brasford, *cit. in* Amaral 2003)

A capacidade de criar um panorama positivo no ensino da Matemática, remete-nos para compromissos de mudança significativos, que envolvam com entusiasmo os nossos alunos a resolver problemas matemáticos complexos.

> "A Matemática tem algo de fundamental a oferecer a todas as crianças e jovens. Não a Matemática autoritária, dos dogmas, dos anátemas, do certo e do errado, das humilhações e dos castigos, mas a Matemática das relações, das conexões, das intuições e das descobertas." (Ponte, 2003).

Oliveira (2011), acredita que na Matemática há uma relação simbiótica entre intuição e rigor. A intuição é percecionada como o ponto de partida para a compreensão, ou seja um primeiro estádio para a resolução. Contudo não encerra um fim em si mesmo, tem de ser verificada pelo rigor.

A formação contínua dos professores é talvez um dos pontos que reúne mais apoiantes, como fator de inevitável mudança e de perspetiva de reconversão dos maus resultados matemáticos. No entendimento de vários setores da sociedade, a formação inicial dos professores, com maior incidência nos professores do 1º Ciclo, tem sido conotada como uma das possíveis razões deste insucesso, pelo reduzido número de horas dedicadas a esta disciplina, bem como falhas de cariz científico nos conteúdos curriculares. Esta lacuna poderia ser ultrapassada pela opção individual de ampliar conhecimentos teóricos, ainda que esta tarefa tenha sido dificultada pela quase inexistência de livros direcionados exclusivamente para o 1º Ciclo e a existência de outros ultrapassar o grau de abstração compatível com as crianças de 10 anos de idade (Palhares, 2004). Atualmente, esta situação tem vindo a sofrer uma evolução pela publicação de alguma bibliografia direcionada para a didática da Matemática e estudos de investigação, num âmbito mais abrangente, englobando o 1º ciclo, o que tem contribuído para um suporte científico com maior sustentação. Numa aproximação empírica, levada pela observação, essencialmente nos últimos anos, o professor do 1º ciclo procura contextualizar de forma científica as noções trabalhadas, numa procura solitária em livros de didática ou apenas livros que de uma forma abrangente contemple temas que implementem uma atitude inovadora e promissora de ensino. A formação contínua dos professores é, sem dúvida, uma realidade de plurais recursos: evidencia oportunidades de ajustar realidades vividas durante anos numa sala de aula; promove processos de produção da inovação que inspiram motivação e vontade de mudar; proporciona formação científica; viabiliza a atualização dos conhecimentos conteúdos curriculares e reverte atitudes formatadas de um ensino expositivo e unidirecional. Numa sociedade em constante mudança, impera em todos os setores da sociedade uma necessidade de atualização, pela ampliação de saberes, uma reflexão sobre os próprios saberes, avançando em relação a estes com implicações numa prática promissora e gratificante. Segundo Ferreira (2006) o desenvolvimento profissional do professor envolve três pontos que não poderão ser analisados isoladamente: *o saber, o saber fazer e o saber ser/saber tornar-se*. Assim a formação transcende o papel de uma resposta estratégica a uma reforma para se tornar numa mudança assumida de forma pessoal e organizativa da escola. (Canário, 1991, *cit. in* Ferreira 2006).

Pretende-se que a formação dos professores, nomeadamente os professores do 1º ciclo, seja veiculada pela investigação de natureza colaborativa, centrada nas práticas, com ênfase na comunicação matemática visando o desenvolvimento profissional dos professores. Ao mencionarmos os termos investigação e reflexão, ainda que de diferente sinonímia, eles estão intimamente ligados num mesmo percurso. Reflexão pressupõe um olhar direto para uma experiência de uma forma indireta, “num processo de exame e reexame da nossa experiência reestruturando-a” (Korthagen *cit. in* Menezes & Ponte 2006).

Niza (1995), veicula como emergente uma formação cooperada que faça face ao isolamento da comunidade docente e à competição entre os seus membros, e proporcione um ambiente de aprendizagem onde a diversidade seja valorizada e os efeitos produzidos possam ser sentidos por todos.

Perspetivar a aprendizagem da Matemática requer uma preparação de experiências que proporcionem aos alunos conhecimentos matemáticos. Deste modo, essa preparação terá de manifestar a compreensão dos conhecimentos matemáticos dos alunos, a sua capacidade de os utilizar, o que se pretende que os alunos aprendam, bem como o prazer da descoberta e a sequente confiança. (NCTM, 2007).

Os Princípios e Normas para a Matemática traduzido para a língua portuguesa pela APM, em 2007, do documento americano *Standards do National Council of Teachers* *of Mathematics* (NCTM), pretendem fornecer uma orientação a todos os educadores que se empenham de forma contínua numa aprendizagem promissora da Matemática, nas salas de aula. Para tal elaboraram seis princípios para a matemática escolar que se inter-relacionam num mesmo propósito, a aprendizagem da Matemática:

- *Equidade,* rompendo "com a crença de que só alguns aprendem Matemática" (NCTM, p.13) bem como assegurando o papel de expectativas mais altas nos alunos através da comunicação de todos os alunos.

- *Currículo*, escolar, caracterizado pela coerência, pela articulação de ideias matemáticas eficazes, num enquadramento de continuidade de estudos ou em diferentes contextos da vida diária.

- *Ensino,* dando primazia à sala de aula e ao ambiente de aprendizagem daí emergente, exigindo uma continua reflexão de forma a poder ser aperfeiçoado.

- *Aprendizagem*, orientando este processo para o desafio que emerge de tarefas preparadas pelo professor, com um propósito específico, tornando os alunos capazes de resolver problemas de gradual complexidade. "Mesmo uma tarefa difícil poderá ser envolvente e compensadora" (NCTM; p. 22)

- *Avaliação* que deverá servir a aprendizagem, logo deverá apoiar os alunos fornecendo orientações que os professores necessitam na tomada de decisões.

- *Tecnologia* acessível a todos, uma outra ferramenta matemática que deverá ser largamente utilizada, não só com o propósito de enriquecer as aprendizagens matemáticas dos alunos como também como opção de adaptação do ensino às necessidades especiais de alguns deles. (NCTM, 2007).

A aprendizagem não pode estar centrada no estudo de definições, Vigotsky (1997) patente no método tradicional de estudo e usado para investigar conceitos já definidos e formados na criança através da transmissão verbal dos seus conteúdos.

> "Este método lida com os resultados do processo acabado de formação de conceitos, com o produto final do processo. Utilizando esta abordagem, não considera a dinâmica do processo, o seu desenvolvimento, o seu curso, o seu início e o seu fim. È uma investigação do produto e não do processo que leva à sua formação."(p.147).

Contudo não é nossa intenção menosprezar os conceitos matemáticos mas sim a forma como são apreendidos. A preocupação deveria estar precisamente no rigor dos conceitos que antecede o rigor formal, ou seja interessa que os alunos aprendam bem os conceitos em tarefas às quais os alunos atribuam significado (Viana, 2011).

x O contexto sala de aula: as orientações metodológicas do PMEB

A visão da aprendizagem da Matemática, acima apresentada e defendida, leva forçosamente a considerar o contexto de sala de aula como o palco onde se processa toda a aprendizagem matemática. É neste contexto que emergem os objetos matemáticos no trabalho desenvolvido pelos alunos. Considerando os mesmos objetos matemáticos passíveis de diferentes interpretações, dependendo da preparação do professor e dos alunos e da possibilidade de os saber aproveitar de forma a criar um ambiente propício à aprendizagem de todos. (Voight, 1994).

Para tal, o professor deverá manter-se atualizado quer sobre os conceitos e processos fundamentais da Matemática, quer sobre os desenvolvimentos da Didática da Matemática. De facto ao professor cabe planear o trabalho de um tópico elaborando uma sequência de tarefas, tendo em mente o conhecimento dos alunos, as conexões perspetivadas, os recursos a utilizar, bem como o conhecimento do currículo de Matemática, promovendo o desenvolvimento e a compreensão, a resolução de problemas, o raciocínio e as competências de cálculo. (Ponte & Serrazina, 2000). As orientações metodológicas apresentadas no PMEB assumirão diferentes formas de trabalho na sala de aula. A aprendizagem da Matemática não pressupõe um modo específico e generalizado de trabalho. Resolver tarefas individualmente é importante, pela leitura e interpretação e redação, que lhe está associada. Noutras situações será previsto o trabalho a pares, mais direcionado para pequenas tarefas e quando se revela importante a troca de impressões, a partilha de dúvidas e de conhecimentos. Um outro tipo de organização, em grupo, poderá estar mais direcionado para o trabalho em pequenos projetos pela distribuição de tarefas. Também o trabalho coletivo é mencionado nas orientações metodológicas)

> “ (…) em turma é muito importante para proporcionar momentos de partilha e discussão bem como para a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias

> matemáticas, devendo o professor criar condições para uma efectiva participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho (…)" (PMEB, 2007, p. 10)

Seria abusivo afirmar que as orientações metodológicas do NPMEB são do livre arbítrio do professor. Elas estão mencionadas no novo programa de Matemática (p.8 a 10), apelam ao trabalho empreendedor do professor no ensino da Matemática. Cabe ao professor gerir o percurso com conhecimento à priori de que há metas e objetivos a cumprir, em conformidade com as necessidades prementes na turma. Propõe-se a diversidade de experiências de aprendizagem com clara negociação de significados matemáticos, apelando à compreensão e memorização da tabuada, factos básicos …, a exercícios de sistematização, ao trabalho exploratório incentivando a descoberta como o passo que antecede a transferência de saberes para outros contextos, ou seja uma articulação de conhecimentos que se pretende promissora em contextos diversos. Os conhecimentos são transferidos da concretização para a abstração, pela compreensão e empenho na descoberta do significado matemático nos conceitos trabalhados.

> " O mais eficaz, como se imagina, é uma aliança eclética entre o ensino teórico e o ensino aplicado, sendo este referido a contextos diversos e não demasiadamente restrito a aplicações particulares" (Crato, 2006, p. 72)

Trata-se de uma metodologia que em alternativa ao treino excessivo, investe na resolução de problemas, no testar de soluções alternativas e no desenvolvimento de conceitos (Festas, 2011).

Também à criança não é atribuído o papel de explorador solitário ou de companheirismo. Numa primeira etapa, o professor é responsabilizado pela preparação das tarefas que indiciem o conhecimento que se pretende alcançar. Numa segunda etapa, durante a aula o professor promove a descoberta através da reflexão, da interação com os alunos e da argumentação, que preencha os vazios e dê forma ao que eles descobriram, clarifique conceitos e enfatize relações de aprendizagens novas com outras anteriores (Viana, 2011). Numa terceira etapa, após a aula, o professor deverá refletir sobre o trabalho efetuado e assim poder preparar o trabalho sequente ou infletir a trajetória inicialmente pensada.

Perspetiva-se a aprendizagem articulada com orientações sólidas que acompanham um novo currículo.

Segundo Damião (2011), ainda que os professores não conheçam as orientações patentes nos documentos curriculares, poderão apoiar-se nos manuais escolares ou em ações de formação ou ainda em documentos elaborados para esse efeito, ao nível de escola.

Será que os professores consultaram as orientações metodológicas gerais que acompanham o novo PMEB?

xi A realização matemática na perspetiva realista

Um dos aspetos centrais da educação matemática realista (EMR) consiste na perceção de que todas as crianças possuem experiências com diferentes tipos de problemas numéricos, antes da entrada na escolaridade obrigatória. Logo, o ensino escolar não pode ser isolado das situações *reais* do quotidiano, mas aproveitar esses conhecimentos e estratégias informais que as crianças já tinham anteriormente e estabelecer uma relação destas com o ensino da Matemática (Resnick, 1993). Um outro aspeto igualmente importante da educação matemática realista, tal como na teoria construtivista (Cobb, 1987), assegura que os alunos deverão construir os seus próprios conhecimentos e não reproduzir as estratégias ensinadas na aula de Matemática. Assim pretende-se que os alunos, numa fase inicial, utilizem os seus conhecimentos informais através do equacionamento de problemas que se relacionem com a sua experiência. Os alunos são assim encorajados a descobrir a estratégia de resolução construindo o seu próprio conhecimento (Cobb, 1987). Esta construção de conhecimento e de significado tem subjacente o trabalho colaborativo, com exposição de pareceres e discussões de turma. Gradualmente, o processo de aprendizagem, inserido na EMR, deverá transpor o concreto para o abstrato, ou seja os métodos informais e contextualizados inicialmente usados pelos alunos, deverão ser direcionados para a formalização matemática. Este aspeto não vai ao encontro das tradicionais práticas escolares, que resultam na utilização rígida de procedimentos para uma iniciação, mas com as quais se corre o risco de conduzir a uma insuficiente flexibilização de estratégias.

A ligação biunívoca *mundo real - matemática* é caracterizada pelo peso atribuído, na conexão, ao mundo real. Este processo de modelação matemática, pelo pragmatismo que lhe é inerente, leva a que a resolução de problemas da vida real seja trabalhada fazendo associações a conhecimento/vivências, no que respeita à realidade representada na tarefa, e numa segunda fase apoiados em modelos matemáticos (Ferri, 2010).

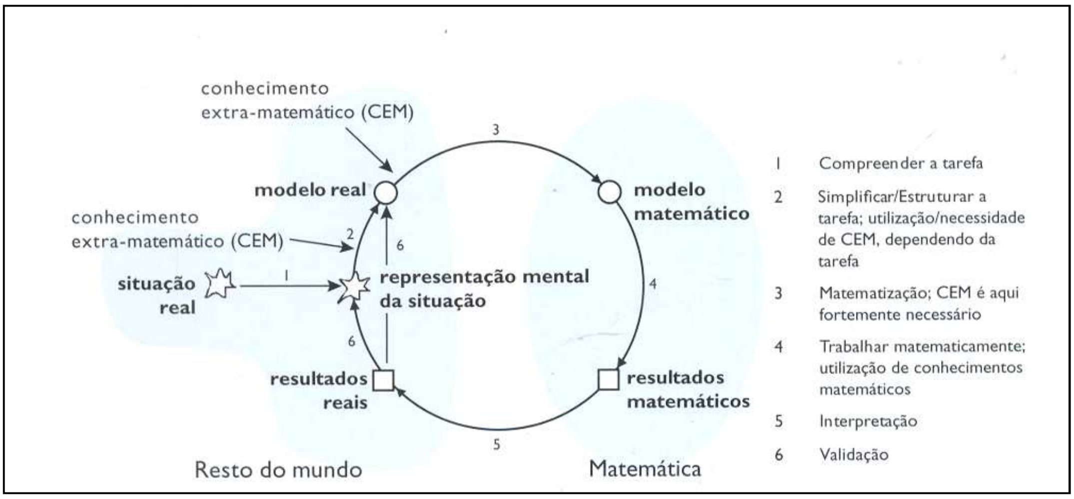


Figura 2: Ciclo de modelação (Ferri, 2006)

Lave (1992), entende a matematização do real dos alunos como o somatório dos processos matemáticos. O ambiente de aprendizagem proporciona aos alunos a capacidade de atribuírem significado matemático à sua experiência, nomeadamente quando interiorizam o problema e o matematizam intencionalmente. Levar para a sala de aula problemas hipotéticos, provoca desinteresse e desmotiva os alunos. Se se pretende cativar a atenção dos alunos devem proporcionar-se dilemas matemáticos que impulsionam a capacidade de improvisar novas práticas matemáticas e, por conseguinte, ótimas oportunidades de aprender Matemática. Para esta antropóloga o essencial está no discernimento entre o que capta o interesse dos alunos e os leva a envolverem-se dando sentido à sua atividade matemática, ao promover o interesse pela procura em torno daquilo que é, para eles, realmente problemático e não no discernimento entre o concreto e o abstrato.

No âmbito desta envolvência matemática é um truísmo afirmar que a aula de Matemática tem como objetivo ajudar os alunos a aprender. Os alunos aprendem quando são eles mesmos a construírem significados matemáticos em torno de uma cultura matemática que lhes proporcione situações de experiência matemática (como modelar, explorar, investigar, conjeturar, apresentar). Assim, crê-se que os alunos sintam gosto pela Matemática e pensem matematicamente.

> "Para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em contextos de realidade" (Guiménez et al., 2004, p. 26)

Sebastião e Silva (*cit. in* Ponte 2003) era apologista, no ensino da Matemática, dos exercícios que tivessem alguma relação com a realidade, pelo interesse e intuição que suscitavam nos alunos.

xii Matemática para todos

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, estabelece linhas de análise para a aprendizagem da Matemática, "um currículo matemático sólido", "professores preparados e competentes", e um ambiente de sala de aula com condições. Defende desde o início a "ligação entre equidade e excelência", ou seja "entre Matemática para todos e Matemática com compreensão: no século vinte e um, deverá esperar-se que todos os alunos compreendam e sejam capazes de aplicar os seus conhecimentos de Matemática" (NCTM, 2007, p. 21).

Mas também a Matemática, deve ser entendida como um património cultural ao alcance de todos.

> "Actualmente ainda constitui um desafio assumir que uma aprendizagem significativa da Matemática, envolvendo a possibilidade de contactar, a nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais por forma a apreciar o seu valor, é um direito generalizado." (Amaral, 2003, p.5).

Numa sociedade onde as competências matemáticas adquiriram um lugar de destaque, houve a preocupação de facilitar a sua aquisição a todos os cidadãos. Se há uns anos definíamos como alfabetizado todo o individuo que demonstrava o domínio, ainda que elementar, da leitura, escrita e cálculo, já em 1999 se afirmava uma realidade bem diferente. Valoriza-se a capacidade de mobilizar conhecimentos face a situações problemáticas, em diferentes contextos, recorrendo-se a outro conceito, o de *literacia*, ou neste caso o de *literacia matemática*. (Abrantes et al., 1999).

Assim, ultrapassada a visão fragmentada de que só alguns são capazes de aprender Matemática, não é ambicioso afirmar que o programa curricular vem a favor do princípio da equidade, na forma como ele pode ser trabalhado. É possível apoiar alguns alunos, para alcançar expectativas elevadas, com um prolongamento do tempo para a concretização da tarefa, com recursos adicionais como sejam explicações de alunos mais avançados ou de apoio dos colegas ou até de programas de apoio extracurriculares, entre outros (NCTM, 2007). Também os registos podem ser diversificados, desde o desenho, à escrita simbólica inventada ou convencional, apresentando diferentes níveis de compreensão porém sendo assumidos como uma poderosa ferramenta de raciocínio. (Edward set al., 1993).

Em virtude da transversalidade da Matemática, hoje em dia, em qualquer ramo do saber, é natural que se exija "da escola uma formação sólida em Matemática para todos os alunos". (PMEB, p.3).

Desde muito cedo que as crianças vão estabelecendo bases para o desenvolvimento matemático, através das suas experiências, pela curiosidade e entusiasmo que lhes são inerentes. Muitos conceitos matemáticos são desenvolvidos de forma intuitiva, antes da criança entrar na escola. O princípio de que todos os alunos podem aprender Matemática é também extensível a todas as idades. As crianças identificam um número reduzido de objetos, identificam entre vários objetos, o maior e o menor, ou seja as crianças possuem conhecimentos matemáticos informais. Ao entrarem no 1º Ciclo é natural que surjam vários níveis de conhecimentos matemáticos pela ausência de oportunidades de aprendizagem de algumas crianças e não pela inexistência de capacidades nessas crianças. Contudo, poderão algumas delas necessitar de apoio adicional, mediante as suas necessidades e características. É importante que todas as crianças participem em atividades de forma a desenvolver os conhecimentos matemáticos intuitivos e informais. Essas atividades deverão basear-se no conhecimento do desenvolvimento da criança e proporcionar um ambiente que os estimule a tornar-se ativos na sua aprendizagem (NCTM, 2007).

> "Todos os alunos necessitam de tempo suficiente e oportunidades adequadas para desenvolver, construir, testar e reflectir sobre os seus crescentes conhecimentos matemáticos. A educação, nestes primeiros anos, deverá basear-se no princípio de que todos os alunos podem aprender uma matemática significativa" (p.87)

O professor, na gestão curricular, tem em conta os conhecimentos dos seus alunos e as suas condições de trabalho. Assim, algumas das condições centrais são, naturalmente, a capacidade e o interesse dos seus alunos. Nem todos os alunos reagem bem a todo o tipo de propostas. Também sentimos que, atualmente, cresce o número de alunos que revelam alguma apatia em relação à escola em geral e à Matemática em particular. Deparamo-nos então com turmas com características diversas, no que respeita a conhecimentos matemáticos, interesse pela Matemática, atitude em relação à escola, acompanhamento familiar, condições de trabalho, etc. Esta diversidade deve ser entendida pelo professor como um responsabilidade na forma como tenta corresponder de forma equilibrada às necessidades e interesses de todos (Ponte, 1998). Ainda segundo este autor, a avaliação é uma ferramenta importantíssima para detetar problemas e insuficiências nas aprendizagens dos alunos e do seu próprio trabalho permitindo perceber se há necessidade, ou não, de introduzir mudanças na sua planificação e condução. A participação dos alunos na autoavaliação favorece a reflexão sobre a avaliação realizada pelo professor. Na gestão curricular o professor deverá "equacionar de modo crítico as necessidades dos seus alunos" (Ponte, 1998), e tentar fazer uma gestão articulada com as necessidades dos seus alunos que inclui, de modo decisivo, a definição de estratégias e a seleção de tarefas, procurando que todos os alunos descubram por si mesmo, apoiados pelo professor e em negociações com os colegas da turma, uma Matemática para todos.

xiii A atividade matemática em sequência de tarefas

A planificação de uma aula resulta de uma análise cuidada do que se pretende que os alunos aprendam, num percurso em que as aprendizagens já feitas são um dado a ter em conta, bem como o conhecimento dos alunos, de forma a criar oportunidades para os alunos se envolverem numa experiência de aprendizagem (Anexo C). Esta planificação faz parte de uma *trajetória hipotética de aprendizagem*, segundo Simon (1995) na medida em que os objetivos estabelecidos pelo professor para os seus alunos, acionaram a planificação para as atividades de aprendizagem a desenvolver e as hipóteses previstas pelo professor sobre o processo de aprendizagem dos alunos, são hipóteses, passíveis de se concretizarem. Pressupõem também contemplar a diferenciação de estratégias e de linhas de pensamento que enriquecem o desenvolvimento da aula. Também a aula não é pensada como um constructo isolado, ela esta inserida numa sequência de tarefas, onde acrescem novas dimensões ao seu potencial e aos seus objetivos, uma *progressão de desenvolvimento* onde os alunos gradualmente desenvolvem níveis de pensamento em experiências de aprendizagem organizadas e criadas com objetivos definidos e pondo à prova *trajectórias hipotéticas de aprendizagem,* baseadas na investigação (Serrazina & Oliveira, 2010).

Cabe ao professor, mediante uma boa análise, ultrapassar boas atividades isoladas para passar a uma sequência de tarefas

> (…) acrescentam-se novas dimensões ao seu potencial e aos seus objectivos. (…) ajuda-nos a pensar sobre algumas implicações desta conexão planificação-aprendizagem o estabelecimento de uma corrente de ideias que liguem tarefas e aprendizagem." (Loureiro, 2008, pp 29 -.30).

Ao fazer a planificação de um tópico, o professor considera uma estratégia de ensino, onde se destaca a atividade do professor e o trabalho previsto do aluno e o tempo para a respetiva realização. Nesta planificação pretende-se que o professor generalize a utilização de uma estratégia de *ensino-aprendizagem exploratório, ou ensino por descoberta, ensino ativo,* no qual o professor limita as suas explicações, deixando para o aluno o trabalho de descoberta e de construção de conhecimento, ao invés do *ensino direto,* que tem por base a transmissão direta de conhecimentos, num ensino expositivo.

Após a realização da atividade, o professor deve mencionar na planificação da tarefa o momento de discussão e sistematização, onde os alunos após o trabalho prático, apresentam o seu trabalho, expõem as suas conjeturas e descobertas, argumentam e questionam-se uns aos outros e é também o momento onde o professor poderá clarificar os conceitos e procedimentos e estabelecer conexões dentro e fora da Matemática. Esta participação dos alunos exige do professor uma especial atenção, pelo seu papel de mediador, ainda que a condução da discussão nem sempre caiba ao professor, mas também aos alunos ou professor e alunos." (Ponte, 1998).

É neste *feedback* que se desenham novas tarefas num encadeado definido segundo uma determinada meta. Neste percurso quebram-se raciocínios rotineiros ou repetitivos pela possibilidade de implementar formas de raciocínio matemático mais avançado, caso contrário deixaria de fazer sentido esta construção em sequências (Gravemeijer, 2004, *cit. in* Serrazina & Oliveira 2010).

Será que os professores que não frequentaram o PFCM reconhecem o papel de uma sequência de tarefas, na aprendizagem da Matemática?

xiv A tarefa matemática

Tarefa significa uma situação de aprendizagem cujo ponto de partida é proposto pelo professor, contudo pressupõe uma interpretação e empenho por parte do aluno e uma subsequente investigação capaz de promover diversas atividades nos alunos (Ponte & Serrazina, 2000).

Este tipo de trabalho fomenta a autonomia nos alunos, indo assim ao encontro de um dos objetivos do PMEB. O desafio que uma tarefa matemática oferece, quando selecionada com especificidade para um grupo, tendo em conta os conhecimentos prévios e trabalhos desenvolvidos anteriormente, incute confiança na resolução de problemas difíceis, pela vontade de chegar à resposta correta, numa experimentação de caminhos alternativos facultados pela reflexão e pelo erro, numa base de exploração de ideias matemáticas. A sensação de gratificação aciona o saber e o empenho, nesta área. (NCTM, 2007)

Oliveira, F. (2011), criticamente, defende a aprendizagem no âmbito de um estudo estruturado, centrado no professor e não no aluno, pelo que as *actividades exploratórias podem e devem ajudar no Ensino, mas não podem ser um fim em si*. No entanto tal crítica falha o alvo, pois como já referimos anteriormente, quando nos debruçávamos sobre as orientações metodológicas do PMEB, não existe a *implementação feita*, existem algumas orientações passíveis de ser implementadas conforme o objetivo pretendido, os atores em cena e o palco onde tudo decorre.

Também a natureza das tarefas varia conforme os contextos de aprendizagem, podem ser mais desafiantes, outras mais acessíveis, ou ainda tarefas mais abertas ou mais fechadas, outras contextualizam a realidade vivenciada pelos alunos ou até tarefas “formuladas em termos puramente matemáticos” (Ponte, 1998). Nesta diversidade de tarefas, o professor deverá dar ênfase aos “problemas, exercícios, investigações, actividades de exploração e projectos” (Ponte, 1998).

> “O outro elemento central da gestão curricular é a estratégia posta em prática pelo professor. Uma estratégia de ensino envolve usualmente diferentes tipos de tarefas, articuladas entre si. Um único tipo de tarefas dificilmente atingirá todos os objectivos curriculares valorizados pelo professor. Por isso, usualmente ele procura variar as tarefas, escolhendo-as em função dos acontecimentos e da resposta que vai obtendo dos alunos” (Ponte, 1998, p.11)

Assim, os tipos de tarefas apresentam duas dimensões: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. A primeira varia entre desafio *reduzido e elevado* e perceciona a dificuldade, muitas vezes utilizada em sala de aula ou em testes. O grau de estrutura varia entre *aberto e fechado.*

> “Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido ou em ambas as coisas” .Cruzando estas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes (…) Um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2º quadrante); Um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio (3º quadrante); Uma *investigação* tem um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta (4º quadrante). Resta-nos o 1º quadrante, o das tarefas relativamente abertas e fáceis, que designaremos por tarefas de *exploração*. “(Ponte, 1998, p.17 e 18)

No que diz respeito à tarefa aberta, tarefa de investigação, *4º quadrante,* requer dos alunos, não só a investigação, uma das etapas da tarefa matemática, mas também o acompanhamento de questões produtivas, pelo formular e testar conjeturas. Este processo impele os alunos a abandonar dados ou à necessidade de procurar outros, bem como à reformulação de conjeturas em desfavor de outras anteriormente formuladas (Ponte et al., 1999). O confronto em grande grupo de argumentos capazes de validar conjeturas em detrimento de outras, é importante para aprendizagem dos alunos e indicador para o professor de questões emergentes. Estas etapas não preconizam uma ordem pré-estabelecida, elas são faseadas por vários processos matemáticos, desde a recolha e organização de dados, a formulação e teste de conjeturas, até à prova em diferentes sentidos num mesmo processo investigativo (Brocardo, 2001). Esta autora dá ênfase à interação entre todos os processos matemáticos, emergentes numa mesma tarefa matemática, utilizando com algum propósito a expressão “não linearidade” para a caracterizar.

Mais uma vez cabe ao professor a gestão do currículo de forma a promover um ambiente que envolva os alunos numa aprendizagem com significado.

> "A gestão do curricular realizada pelo professor implica uma (re)construção do currículo, tendo em conta os seus alunos e as suas condições de trabalho. Esta gestão curricular assenta, de modo central, em dois elementos. Um deles é a criação de tarefas, a partir das quais os alunos se possam envolver matematicamente, ricas e produtivas."(Ponte 1998, p.11)

O sentido de qualquer ideia matemática torna-se significativo pelas suas conexões com o conhecimento pessoal de cada indivíduo (Bishop & Goffree, 1986; Minsky, 1986). Assim, a interpretação de cada objeto relaciona-se com a formação de um contexto sensível, logo factual, desprovido de experimentação pelo indivíduo como objeto plurissemântico.

Esta perspetiva é partilhada por Meira (1996) que questiona a existência de tarefas matemáticas com um objetivo fixo, dada a sua transformação em atividade. Por conseguinte, alunos e professores produzem os seus próprios significados (individuais e coletivos).

A aprendizagem dos alunos resulta essencialmente de dois fatores: a atividade que desenvolvem e a reflexão sobre essa mesma atividade. Esta perspetiva de aprendizagem é defendida por muito autores, como Bishop & Goffree (1986) e Christiansen & Walther (1986). Quando se está envolvido numa atividade, pode afirmar-se que se realiza uma tarefa. Assim, uma tarefa é o objetivo da atividade. A tarefa pode ser formulada pelo professor ou ser proposta pelo aluno, ou por ambos. A tarefa também não apresenta características lineares, para a sua apresentação. Pode ser enunciada logo no início da aula ou apresentada no decorrer do trabalho.

xv Resolução de problemas

A responsabilidade de formular tarefas adequadas, e o modo de as propor pelo professor, suscita a atividade do aluno e a envolvência na atividade conduz à aprendizagem. Segundo Pólya (1975,1981), a condição para que os alunos compreendam a verdadeira natureza da Matemática e adquiram gosto por ela é a oportunidade de resolução de problemas, pelo desafio inerente à sua resolução e pelo gosto sentido na descoberta.

A resolução de problemas não é uma tónica atual, esteve sempre presente nas práticas das escolas ainda que muito associado ao domínio de factos e procedimentos rotineiros. A resolução de problemas adquiriu no PMEB, uma primeira abordagem quando se fala em capacidade transversal associada ao raciocínio e à comunicação matemática, apelando aos professores para a necessidade de proporcionar situações em que os alunos possam resolver, e em simultâneo analisar e refletir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas.

> "A resolução de problemas promove o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objectivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as actividades a realizar em aula" (PMEB, 2007, p.9)

Relevância similar é feita pelo NCTM:

> "A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo da Matemática. A resolução de problemas não é um foco distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas". (NCTM, 2007, p.29)

Esta omnipresença da resolução de problemas advém da oportunidade de revelar o papel da Matemática no quotidiano dos alunos. Mais uma vez recai no professor a seleção de problemas: se eles forem acessíveis, os alunos não se sentem desafiados nas suas capacidades matemáticas e então deixam de ser problemas para serem exercícios, enquanto se comportarem um elevado grau de dificuldade, o aluno tenderá a desistir."(Ponte, 1998, p.13). Definir um problema requer, à partida, que não se disponha de imediato de um procedimento visível que nos permita chegar à sua resolução e todo o conjunto de práticas e decisões que nos levam à sua resolução será a resolução de problemas. (Vale & Pimentel, 2004)

A resolução de problemas oferece uma oportunidade de desenvolver competências matemáticas e refletir de que modo um contexto pode ou não favorecer esse trabalho. (Brocardo & Serrazina, 2008)

A resolução de problemas assenta em carris que nos permitem aceder a novas ideias e capacidades matemáticas, explorar conceitos matemáticos importantes, bem como compreender a necessidade de usar estratégias diversificadas, propriedades e relações matemáticas. Assim, a resolução de problemas ultrapassa o lugar de conteúdo matemático para um modo de encarar o ensino e a aprendizagem da matemática bem como da própria matemática (Vale & Pimentel, 2004). Também segundo as mesmas autoras, a resolução de problemas pressupõe um processo de organização da informação, o conhecimento e recurso a estratégias, a diferentes formas de representação, a compreensão de linguagens, a aplicação de conhecimentos, a decisões, o reconhecer a razoabilidade do resultado, numa gestão consciente.

> "A resolução de problemas é encarada segundo três perspectivas – por um lado como um **processo,** quando pretendemos dotar os alunos com estratégias de resolução tornando-os solucionadores cada vez mais aptos; é também uma **finalidade**, quando tentamos atender aos aspectos matemáticos como explorar, questionar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis; e por fim, é um **método de ensino**, que surge para introduzir conceitos envolvendo exploração e descoberta, de acordo com as finalidades da matemática e de factos, conceitos. (Vale & Pimentel, 2004, p. 11)

Resolver problemas envolve raciocínio com números, pela compreensão destes e das operações, implica julgamentos matemáticos após a relação entre o contexto do problema e o procedimento, de entre um leque de possíveis realizações e validar ou não a sua resolução pelo contexto original do problema. (Abrantes et al., 1999)

xvi A formação do professor de Matemática

A escola é uma comunidade em que cada membro está interligado entre si, num mesmo projeto, o mesmo será dizer que, cada membro ao investir sobre si mesmo, torna-se mais forte num eu, que coletivamente, contribui para a construção do projeto como o produto de somas parcelares que nos levam, de facto, ao conceito de comunidade. Ética e educação pertencem a uma mesma realidade e constroem-se simultânea e mutuamente. O *professor ético* é o indivíduo que aproveita os espaços de liberdade, inovando um comportamento de compromisso consigo mesmo e com a comunidade. Indivíduo que "cuida de si"(Foucault, 1996), qualificando-se profissionalmente, procurando novas teorias, empregos e salários melhores. Não investe só em si, traz para a sala de aula o que tem de novo, modificando as condições do meio em que atua, assumindo compromissos com o aluno e com a escola, ampliando limites já impostos e (re)construindo uma nova vida na comunidade.

Na mesma perspetiva pode delinear-se o perfil do *professor (cri)ativo*, como o indivíduo que vê na sua prática docente, uma prática criativa e ativa pela oportunidade de criar conhecimentos, a partir do qual se pode transformar a escola e a comunidade envolvente.

Na realidade continuamos a observar diferentes posturas/práticas ao nível dos professores, que os posicionam em diferentes ambientes, dentro de uma mesma comunidade. Os professores tradicionais, estacionados em conceções formalistas e em modelos académico/eficientistas, instituídos por um discurso hegemónico, predominantemente centrado entre o saber de quem domina o conteúdo matemático e os respetivos objetivos avaliativos Num outro ambiente surgem os professores *atualizados*, em formação contínua. Estes mantêm um compromisso com a Educação Matemática, como campo científico e profissional e dispõem no interior da *escola ética*, de espaço e tempo para reuniões coletivas de estudo e reflexão, bem como incentivo para qualificação, para criação de novos projetos e participação em eventos, o que lhes permite deter um conhecimento especializado e em contínua renovação.

A relevância do *status profissional*, do professor de Matemática, que com alguma frequência se evidencia, pode ter relação com aquilo que Larson (1988) chamou de deslocamento de poder, nas sociedades pós-industriais, para aqueles que detêm o conhecimento científico e técnico. Larson (1988) aponta como contraditório, a posse de um conhecimento certificado, especializado e objetivado como o mecanismo chave de legitimação de posições sociais e laborais e, em simultâneo, este conhecimento poder ser considerado um objeto “morto” pela forma como pode ser obtido, de uma vez para sempre. Daí a necessidade do conhecimento ser visto como um processo, uma capacidade em constante renovação de forma a garantir a sua eficácia.

Contudo, o desenvolvimento profissional pode ser enriquecido por experiências de formação, mas vai muito além disso (Ponte, 1998). Assume uma natureza contínua, gerida com autonomia e com ênfase no seu percurso profissional. Para este autor, o principal enfoque é o professor, com a sua experiência e saberes, num processo gerido em diálogo entre teoria e prática e sustentado na reflexão crítica. Vários estudos têm sido feitos neste âmbito e as ideias entre os vários autores cruzam-se num ponto: desenvolvimento profissional. A formação de professores, nos tempos atuais passou a ser impelido por um novo desafio, o designado processo de Bolonha que trouxe para a discussão a formação especializante e centrada no desenvolvimento de competências para o desempenho profissional, mas que ao qual o ensino superior tem tido alguma dificuldade em se adaptar. (Cachapuz, 2009).

Roldão (2009) releva o conhecimento profissional do docente de hoje, pelo reconhecimento social. Este empreendimento pessoal do conhecimento ultrapassa, com frequência a certificação da docência e até os processos formativos centrados na reflexão de práticas e em práticas supervisivas para a construção do conhecimento através da investigação.

Para Sparks & Louks-Horsley (1990), este processo traduz-se em fomentar o conhecimento, as competências e atitudes dos professores. Para Hargreaves & Fullan (1992), ele pode orientar-se para um autoconhecimento e para a mudança ecológica ou em contexto. Liberman (1994), defende que o desenvolvimento profissional se insere na ideia de que os professores se comprometem num processo de aprendizagem, em que o questionar de práticas representa o enfoque principal. Ou seja, refere que no desenvolvimento profissional

> “(…)se assume que o professor é um prático reflexivo, com um conhecimento de base que continuamente constrói sobre essa base através da pesquisa da prática, repensando e reavaliando constantemente os seus valores e prática, em concertação com os outros”(p.15).

No mesmo sentido, Krainer (2001) refere o desenvolvimento dos professores apoiado em quatro atitudes e competências: ação, reflexão, autonomia e colaboração que se organizam numa mesma realidade. A mesma direção é assumida por Clement & Vandenberghe (2000) ao juntar dimensões como autonomia e colaboração/colegialidade, dado que “para colaborar de forma adequada, os professores necessitam de trabalhar sozinhos algumas vezes, e vice-versa” (p.85). Da interação destes aspetos, em ambiente individuais e coletivos, do confronto da prática com a reflexão emergem, ao longo do percurso profissional, os conhecimentos e as práticas profissionais dos professores.

A formação do professor envolve todo um processo que começa com a sua formação inicial, as vivências como aluno e professor e as influências pessoais, motivacionais, sociais e cognitivo-afetivos. Desenvolver-se profissionalmente exige vontade, ser agente da própria mudança. Nesse sentido, a aprendizagem aciona o desenvolvimento profissional, alterando, ampliando, revendo e avançando em relação aos próprios saberes, à própria forma de aprender e à prática pedagógica.

O desenvolvimento profissional do professor envolve três dimensões essenciais e articuladas entre si: o *saber*: dimensão a que é conferida a aquisição e organização de conhecimentos específicos do conteúdo; o *saber fazer*: envolvendo o desenvolvimento de atividades e estratégias de ensino, bem como ao desempenho profissional diante do ato de ensinar; o *saber ser* e *saber tornar-se*: dimensão afetiva que envolve a perceção sobre o próprio professor e a sua prática, englobando também a componente de relações interpessoais, e ainda as experiências e motivações relacionadas com o desempenho das suas funções docentes e a sua formação (Oliveira, 1997).

No que diz respeito à implementação do PMEB, a frequência no PFCM é relevante, não estamos apenas perante o ajuste de um currículo, mas de uma alternância de práticas pedagógicas que sustentam e otimizam aprendizagens. Esta nova perspetiva de abordar conteúdos matemáticos, alguns também inovadores no 1º ciclo, exigiu dos professores experimentadores, com a frequência de dois anos no PFCM, um trabalho intenso de preparação e apropriação das ideias e orientações metodológicas (Teixeira, 2010). Refere ainda a importância do apoio e da formação, durante o período de experimentação, no desenvolvimento do conhecimento profissional no âmbito da implementação do PMEB.

Será que os professores que não frequentaram o PFCM apreenderam o verdadeiro significado das orientações metodológicas do PMEB?

xvii A perceção da aprendizagem

Brown (1993) alerta para que exames em matemática que consistam somente em trabalhos escritos cronometrados, não podem, dada a sua natureza, avaliar competências de realização de trabalho prático. Ou seja, não podem avaliar a destreza de cálculo, níveis de cálculo, a argumentação matemática nem, a não ser de forma restritiva, o empenho e a capacidade de perseverança e criatividade. Assim, este tipo de trabalho que afere qualidade, só pode ser avaliado na sala de aula e tais avaliações necessitam ser feitas durante um maior período de tempo. Já as propostas alternativas de Resnick & Resnick (1992) no que se refere ao *currículo pensante* e de Gardner (1992) na "escola centrada no indivíduo", revelam que, ao menos entre os pesquisadores, é unânime a ideia de que os padrões tradicionais não têm dado resposta para atender às exigências de novos contextos. Contudo, estudos internacionais de avaliação de conhecimentos dos alunos portugueses em três domínios fundamentais: leitura, matemática e ciências, situam Portugal na média dos países da OCDE, como constam da página do GAVE (Gabinete de Avaliação Educacional), relativa ao estudo PISA 2009 (Rocha, 2011).

Avaliar a aprendizagens ou competências dos alunos não é um processo linear. Parece tratar-se de um equívoco acreditar que a Matemática, sendo "ciência exacta e objectiva", possa prescindir da reflexão como processo para chegar à formação de conceções epistemológicas, pois

> "(…) não somente a História e a Literatura, mas também Ciências e Matemática devem ser entendidas como domínios interpretativos, nas quais conhecimento e habilidade não podem ser retirados de seus contextos de prática e uso (Resnick & Resnick, 1992, p. 43)

A questão da perceção da aprendizagem, por parte do professor, vai muito além do registo escrito ou da avaliação de um momento por um teste factual. A questão está no aprender o conteúdo e ser capaz de contrapor o "auto silenciamento" (Confrey, 1995) e de "assujeitamento" (Althusser, 1985). Ouvir e tornar-se mais atento às ideias dos outros, tem sido um ponto ao qual se tem dado primazia em todo este trabalho, pela forma como a reflexão sobre o significado dos conceitos se converte em aprendizagem. Se o aluno se sente capaz de exercitar a capacidade de argumentar, não se poderá dissociar esta capacidade de uma outra: o conhecimento. E não há conhecimento sem aprendizagem. Como se discute ou argumenta sobre possibilidades de resolução se não houver aprendizagem que justifique acertos de negociação? Quem poderá ter esta perceção de aprendizagem senão o professor, que diariamente modera, orienta e reflete ante a apresentação de uma próxima tarefa matemática.

xviii O novo Programa da Matemática do Ensino Básico e a inclusão de todos os alunos em tarefas matemáticas

A educação inclusiva tem sido uma temática sobre a qual muitos autores se têm debatido, nomeadamente após Portugal ter assinado a Declaração de Salamanca (1994) onde se defende que os alunos devem aprender juntos, independentemente das diferenças que possam apresentar. Para tal, as escolas deverão munir-se de currículos adequados de forma a poderem adaptar-se às diferentes necessidades dos alunos. Passar do desejável para a prática implica questionar hábitos antigos e promover espaços de reflexão e de trabalho colaborativo, entre professores. Será que essa prática não passa pela implementação do novo PMEB? Cabe aos professores desenvolver uma consciência epistemológica que os leve a aceitar a mudança, a libertarem-se de rotinas enraizadas que adquiriram e refletir sobre as práticas, num trabalho colaborativo entre professores e entre estes e os alunos, sob pena de desperdiçarmos mais uma oportunidade de implementar boas práticas inclusivas.

Skrtic (1995) propõe, como incluindo fatores que podem levar ao desenvolvimento de práticas inclusivas, um modelo que designa por "construtivismo social", que procura estabelecer as três bases que podem apoiar a educação inclusiva: um processo que promova a autonomia dos alunos, a cooperação e a inclusão. Este modelo está muito aproximado das práticas emergentes do novo PMEB, como já foi aqui apresentado. O PMEB partilha das indicações metodológicas já defendidas por Ainscow (1999) ao apontar as escolas que procuram modelos educativos com maior inclusão assentes em seis fatores: *i* ter como ponto de partida as práticas e os conhecimentos já existentes nos alunos; *ii* as diferenças serem vistas como boas oportunidades para a aprendizagem; *iii* inventariar os enclaves à participação; *iiii* utilizar os recursos disponíveis para apoiar a aprendizagem; *iiiii* e criar um ambiente onde o erro seja acolhido como estratégia de aprendizagem e promover a comunicação ligada à prática. Santos (*cit. in* César 2002) afirmava que só no confronto com a diferença podemos conhecer o mundo, enquanto realidade contextualizada na perspetiva relacional que nos rodeia, e até a nós mesmos enquanto "identidade dialógica que somos"(Hermans *cit. in* César 2002). Importa então dar atenção às interações sociais, pelos aspetos positivos que nelas recaem, ao nível da aprendizagem e da concretização da própria escola inclusiva. Fomentar as interações sociais, nomeadamente entre pares, identificando as suas potencialidades, promove o sucesso escolar e concretiza uma escola de todos e para todos (César & Oliveira 2000; César, 2002). Desde a década de 70, que o papel das interações sociais tem vindo a ganhar um lugar de destaque em todo o processo de apropriação de conhecimentos e de desenvolvimento, atribuindo-lhe o nome de competências (César 2000), ou ainda o de conhecimento em ação (Abrantes et al., 1999).

Educar é um desafio pelos riscos que implica aceitar a inovação (Freire,1999). Contudo, se perspetivarmos a escola inclusiva, a inovação neste construto é o respeito pelo aluno como singular que é. Logo educação e ética jogam no mesmo campo e em simultâneo. As escolhas que se façam implicam subscrever determinados princípios epistemológicos em detrimento de outros, mas que ajudam a delinear percursos e em simultâneo construir conhecimentos, desenvolver e mobilizar capacidades em prol de um futuro com projetos.

Relembram-se as indicações metodológicas do PMEB, sobre a promoção das interações entre pares na sala de aula, implementando uma relação biunívoca inovadora que promova as interações verticais (professor/aluno) e as interações horizontais (aluno/aluno), assim como a descoberta, a partilha e a construção de saberes, cruzando ideais da escola inclusiva.

xix Resultados síntese da revisão da literatura

Neste trabalho, perspetivou-se um estudo sobre as implicações que as orientações metodológicas do novo PMEB têm no panorama da educação matemática.

Para tal, recorreu-se:

1- **Estudos –** *textos* científicos de outros
2- **Comunicações** científicas de outros
3- **Dados estatísticos**
4- **Programa de Matemática do Ensino Básico**

Nesta últimas duas décadas temos vindo a assistir a uma crescente preocupação com os resultados dos nossos alunos, apresentados em estudos internacionais (SIAEP, TIMSS e PISA) (**3**) demonstrando com alguma insistência deficiências significativas na aprendizagem matemática dos alunos portugueses. Estes resultados acordaram com o diagnóstico quantitativo (**3**) apresentado por Ferreira & Lima, (2006) sobre o estado do ensino em Portugal, num contexto internacional. Na mesma linha de análise, Buescu, J. (2003), (**3**) apresentou um estudo nacional (**1**) apoiando-se nos conhecimentos fundamentais de matemática, aferidos, em cerca de 1300 alunos que chegaram em 2002/

2003 ao Instituto Superior Técnico, em Lisboa. Também estes resultados são reveladores da precariedade do ensino básico e secundário, segundo o mesmo autor.

Lacunas: Os maus resultados dos nossos alunos não se cingiam apenas à área de Matemática. Morais, J. (2006) (**2**) sustentando a sua comunicação em estudos longitudinais, descritos na literatura científica, vem afirmar que a aprendizagem da leitura influencia diretamente a aprendizagem da Matemática. E a capacidade associada à representação visuo-espacial interfere com a destreza do cálculo.

A reorganização curricular foi uma continuidade na mudança. Desde a década de 40 que Bento Caraça e Sebastião e Silva (1964) (**2**) defendiam um papel ativo do aluno numa interação com o professor, cuja orientação levaria o aluno à descoberta de conceitos e sua definição perspetivando a mudança por um ensino que não se limitasse apenas a alterar currículos, mas que atribuísse a devida importância à forma como esse ensino era ministrado, propondo posturas diferentes no aluno: crítico e reflexivo. O início da década de 60, foi marcado pelo movimento internacional da *Matemática Moderna*, que manteve a insatisfação dos matemáticos face aos resultados dos alunos (Ponte, 2003) (**2**).

Lacunas: A revolução que parecia emergir nos anos 60, limitou-se nos anos 70 a uma atualização de conteúdos dos estudos Segundo (Skilbeck, 1992) (**2**).

Ponte (2003) (**2**) destaca o seminário de Vila Nova de Milfontes, em 1988, da iniciativa da APM, com a participação de professores e educadores matemáticos, como um passo significativo na reformulação da matéria curricular, pela influência de correntes inovadoras sobre currículo e ensino, já desenvolvidas internacionalmente.

Lacunas: Ainda assim segundo Ponte (2003) (**2**) esta mudança não melhorou as aprendizagens dos alunos, pois as orientações ainda estavam muito veiculadas à Matemática moderna, posta em prática no período anterior e por um currículo muito extenso que não se coadunava com as 4 horas semanais de lecionação.

O Programa de Matemática datado do início dos anos 90, sofre um reajustamento, no âmbito dos 3 ciclos do ensino Básico, que já há muito imperava, passando pela publicação, em 2001 do Currículo Nacional do Ensino Básico. (Ponte, 2003) (**2**).

Lacunas: surge um outro movimento *back to basics* que vem contestar o programa de Matemática de 1990/91, o reajustamento do mesmo e o Currículo Nacional de 2001. Contudo, dada a frágil fundamentação da crítica, vingou e estabilizou a situação do ensino secundário (Ponte, 2003) (**2**)

Por iniciativa do ME, foi constituída uma equipa de professores e investigadores em educação matemática com o encargo de reformular o programa do ensino básico. Em 2007, surge o PMEB (**4**) da preocupação por um ensino de qualidade e homologado pelo ME.

Lacunas: Crato (2006) (**2**) refere-o como aniquilador dos conteúdos curriculares em prol de princípios gerais que não são objetivamente legíveis.

A equipa de autores do programa (**4**) a par da reformulação realizada, entregou um conjunto de orientações metodológicas que entendeu convenientes para a sua implementação.

O PMEB, (**4**) valoriza as capacidades de representação e de estabelecimento de conexões, dentro e fora da Matemática, quer no trabalho com as capacidades transversais, quer no trabalho com os temas matemáticos. O papel do aluno passivo que armazena informação ou o papel do professor que repensa as palavras utilizadas pela lógica de uma possível retenção por parte dos alunos, precisaram ser reformulados (Abrantes, Serrazina & Oliveira 1999) (**2**).

Lacunas: Crato, N.(2006) (**2**) fragiliza a excessiva contextualização do ensino pela repercussão negativa na capacidade de abstração. Em contrapartida Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999) (**2**) afirmam que o aluno atribui um significado às coisas a partir dos conhecimentos que tem, ou das próprias vivências e "não necessariamente a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas"

Brocardo, J, (2001) (**1**) Apresenta um estudo dando enfoque às tarefas de investigação na aprendizagem, e no desenvolvimento curricular com base num estudo de caso. Mais tarde, Amaral, H. (2003) (**1**) seguindo a mesma linha de análise comprova através de dois estudos de caso, em duas escolas na periferia de Lisboa, em entrevistas às duas professoras e respetivos alunos, durante e após o trabalho em tarefas investigativas, como o recurso a esta prática está relacionado com a aprendizagem dos alunos.

Lacunas: Crato (2006), (**2**) afirma que o construtivismo pedagógico ingénuo acarreta consigo pedagogias desastrosas. Contudo afirma que "promover a compreensão e a redescoberta por via da experimentação orientada é uma prática pedagógica fundamental para a compreensão aplicada dos fenómenos e para a formação do espírito crítico" (Crato, 2006, p. 92)

Também as interações sociais que tão explicitamente foram estudadas (**1**) por Vygotsky (1995) no sentido de investigar a influência dos fatores sociais na cognição, estiveram subjacentes nas orientações metodológicas do novo programa.

Barata, Melro & César, (2001) (**2**); Borges & César, (2001) (**2**); Correia & César, (2001) (**2**) defendem a dinâmica que emerge de um trabalho colaborativo pelo desabrochar de competências que os próprios alunos desconheciam, ao nível da Matemática e pela implementação de ambientes mais inclusivos.

Domingos, (2010) (**2**) enfatizou o papel dos alunos na comunicação matemática e na regulação das aprendizagens, bem como o repensar das práticas comunicativas dos professores e dos futuros professores.

Lacunas: Parece redutor incluir as ciências da educação na formação inicial dos professores ou até situa-lo nos gabinetes do Ministério da Educação, como comentou Justino, D. (2006) (**2**) e Araújo, L. (2006) (**2**).

Viana, (2011) (**2**) contrapõe afirmando que à criança não é atribuído o papel de explorador solitário ou de companheirismo. Numa primeira etapa, o professor é responsabilizado pela preparação das tarefas que indiciem o conhecimento que se pretende alcançar. Numa segunda etapa, durante a aula o professor promove a descoberta através da reflexão, da interação com os alunos e da argumentação, que preencha os vazios e dê forma ao que eles descobriram, clarifique conceitos e enfatize relações de aprendizagens novas com outras anteriores.

Fonseca, V. (2007) (**1**) fundamenta *a capacidade de aprender a aprender*, através de um estudo experimental onde foram testados os efeitos da educabilidade cognitiva em três instituições: a escola C+S de Francisco de Arruda, o FORPESCAS e a CERCIMOR. Cada criança é um ser único, com capacidades únicas, abertas a estímulos exteriores, capazes de se adaptarem cognitivamente ao ambiente de aprendizagem envolvente.

Lacunas: alguma falta de credibilidade face aos agentes da educação

Atribui-se especial enfoque ao conhecimento do professor como promotor de práticas inclusivas de acordo com a Matemática para todos (NCTM, 2007) (**4**). Patrício, M. (2010) (**4**) comprova através de dois estudos de caso com um professor do 1º ciclo, a lecionar o 4º ano de escolaridade e o outro a lecionar o 6º ano que, o conhecimento profissional dos professores influencia o recurso a tarefas de investigação, na sala de aula.

Em síntese, o PMEB independentemente de quaisquer visões, posições ou até críticas é uma realidade que trouxe consigo desafios e oportunidades numa lógica de aperfeiçoamento do sistema educativo, pela rentabilização do seu ensino, e sobretudo pelos novos modelos de aprendizagem, em que a inclusão dos nossos alunos passou também a ser um dos seus desígnios. Só a concretização desta realidade comprova a sua eficácia. Aceita-se o desafio?

2 Formulação do problema e das perguntas de partida

As lacunas e contradições acima sumariadas e por outro lado a aposta fundamentada no PMEB levam a colocar as perguntas de partida:

- Será que o ambiente e contexto numa sala de aula se associa à aprendizagem/inclusão da Matemática?

Desta pergunta emergem outras questões:

- Será que a Formação Contínua de Matemática para Professores do Ensino Básico, está associada positivamente com os resultados e a inclusão dos alunos?

- Será que a preparação de uma sequência de tarefas, está associada positivamente com os resultados e a inclusão dos alunos?

– Será que a frequência do trabalho colaborativo está associada positivamente com os resultados e a inclusão dos alunos?

– Será que a comunicação matemática está associada positivamente com os resultados e a inclusão dos alunos?

3 Quadro de referência teórico

Consideram-se conceitos básicos do quadro de referência teórica que se adota no presente trabalho, nomeadamente como alicerce na sua parte experimental:

- **aprendizagem matemática**
- **tarefa matemática**
- **comunicação matemática**
- **trabalho cooperativo**
- **prática inclusiva**

Seguidamente sintetiza-se a explicitação assumida para cada conceito, segundo a seleção e interpretação pessoal feita dos contributos previamente identificados na revisão da literatura, e o seu relacionamento com vista a alicerçar a investigação subsequente.

Aprendizagem matemática

A aprendizagem é um processo que segundo Abrantes et al., 1999, realça a motivação subjacente a um ambiente de aula previamente pensado pelo professor como desafiador de vontades, de aliciar práticas e empreender a aprendizagem.

Assim a aprendizagem só pode ser entendida pela dinâmica da motivação ao conjugar o trabalho do professor com a vontade do aluno através da atitude e do ajustar procedimentos, pela reflexão, pela associação de conceitos, pela discussão, em suma pelo significado que é atribuído à atividade matemática.

Nesta envolvente é possível desenvolver um modelo cognitivo assente na **aprendizagem matemática** como fator de atividade diária em que os alunos constroem a sua própria aprendizagem, numa simbiose dos seus conhecimentos informais e dos conhecimentos resultantes das experiências de sala de aula. A construção do próprio conhecimento não obedece a um processo linear e claro.

Segundo a escola comportamentalista, corporizada por F. Skinner a aprendizagem é regulada pelas consequências do comportamento, diferenciando o comportamento operante, como resposta a um estímulo, e comportamento respondente, como resposta desencadeada por estímulos incondicionados. Em contraponto, a escola cognitiva-gestáltica, defendida por J. Bruner e partilhada por Voight (1994), associa a aprendizagem dos alunos ao grau de preparação do professor, capaz de prever como um determinado assunto deverá ser trabalhado. Para tal criaram uma teoria de ensino baseada em quatro princípios: motivação, estrutura, sequência e reforço

Mas a ponte entre a atitude e o conhecimento exige um percurso em que todos devem ser capazes de estabelecer conexões, quer no trabalho prévio do professor, quer na capacidade de selecionar estratégias apropriadas num processo consciente, pelos alunos e que traduza a aprendizagem efetuada.

Assume-se, tal como Ponte (2003), que a **aprendizagem matemática** decorre de uma prática aberta de relações, de conexões, de intuições e de descobertas em que professor e alunos participam, com papéis bem diferenciados.

Tarefa matemática

O ensino-aprendizagem em situações que trabalham interpretações matemáticas e diferentes estratégias de resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação matemática, representações, conexões, pelo desenvolvimento de tarefas matemáticas tem sido o percurso que o novo PMEB tem procurado desenvolver. Ou seja, a aprendizagem decorre da experiência que interpela os alunos a modelar, explorar, investigar, conjeturar, apresentar,… em ambiente interativo e de conjunto.

Prática inclusiva

Abordar processos de interação exige um processo entendido no respeito pelas diferenças, numa lógica de inclusão que importa desenvolver. Reajustar currículos que possam adaptar-se à singularidade dos alunos por forma a permitir a aprendizagem em conjunto é um dos desígnios promovidos pela Declaração de Salamanca de 1994

O confronto com a diferença permite uma visão contextualizada do mundo. (Santos *cit. in* César 2002). É neste contexto que um dos Princípios e Normas para a Matemática, assenta a *Equidade* na Matemática como um fator de aprendizagem ao alcance de todos os alunos. (NCTM, 2007) A mesma visão é partilhada pelo novo Programa de Matemática do Ensino Básico, promovendo as interações sociais, verticais e horizontais, cruzando os ideais de uma escola inclusiva. (PMEB)

Assume-se, neste enquadramento, como Fonseca (2007), a *modificabilidade cognitiva estrutural* (MCE) procurando ir ao encontro do ser singular, com capacidades cognitivas capazes de serem modificáveis pela interação qualitativa, em experiências de aprendizagem mediatizada.

Fazê-lo pela adoção do *Construtivismo social* como um modelo que defende o desenvolvimento de **práticas inclusivas** apoiadas em processos que promovam a autonomia e a cooperação, é segundo Skirtic, (1995) um dos novos desafios da sociedade moderna. As escolas têm que desenvolver modelos educativos que respeitem e aceitem a diferença, canalizando recursos e ambientes de trabalho que promovam uma heterogeneidade implícita. Educação e ética fazem parte do projeto escola onde o respeito pela individualidade é uma causa. (Freire, 1999). Consideram-se estas opções válidas e atualizadas enquanto estruturantes das práticas matemáticas a adotar.

A diversidade em ambiente cooperativo

Os professores devem ser capazes de encontrar o momento da discussão e sistematização, onde os alunos apresentam o seu trabalho, negoceiam e clarificam significados, encontrem as suas diferenças e promovam o conhecimento pela interação do grupo, num quadro de permanente argumentação lógica em que o aluno descobre e sobretudo acredita. O gosto pela descoberta é condição essencial para que os alunos compreendam a verdadeira natureza da Matemática. (Pólya, 1981). Assim, importa verificar a importância do desenvolvimento do trabalho cooperativo como facilitador de aquisição de competências e do conhecimento de si próprio e dos outros, que como nos refere Fernandes, 1998, é uma nova abordagem ao nível da aprendizagem. A diversidade de tarefas, a resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação matemática, representações, conexões, diversidade de recursos, cálculo mental, consciencialização do papel da Matemática e diferentes formas de trabalho na sala de aula são realidades que a dinâmica subjacente à aprendizagem exige ao professor.

Assume-se que tudo isto pressupõe aceitar, em **ambiente cooperativo** a **diferenciação de estratégias e de linhas de pensamento e valorizar tal diversidade** enquanto fator do enriquecimento do trabalho em sala de aula. (Serrazina & Oliveira, 2010)

As linhas condutoras de relacionamento

Definido conceptualmente o enquadramento procuraremos ao longo do nosso trabalho, identificar, relacionar e procurar construir âncoras de suporte que demonstrem a importância da **aprendizagem matemática**, proporcionada pela realização de **tarefas matemáticas** como um dos fatores determinantes no desenvolvimento da aprendizagem, em contexto valorizador das naturais diferenças de que cada aluno, pelo designado processo de **inclusão**. Este envolvimento só será possível pelo desenvolvimento de uma adequada **comunicação matemática,** em que o **trabalho cooperativo** se constitui como o modelo estruturante da aprendizagem. Assim, entendemos realçar neste quadro de referência teórico a intervenção do professor como responsável primeiro pela aprendizagem ao colocar-se como agregador dos métodos e processos que promovam a conjugação entre o ambiente da sala de aula, o conhecimento existente e sobretudo a vontade dos alunos. Estaremos provavelmente a associar e potenciar o conhecimento pelo desenvolvimento de novas pedagogias que nos possam confirmar que pela prática matemática muito mais se pode alcançar.

Capítulo III - Desenho do Estudo

1 Metodologia e Estrutura da Investigação

i Percurso Metodológico

A metodologia de investigação utilizada para o presente estudo articula, por triangulação, o método indutivo com o método hipotético-dedutivo.
O estudo realizado (Figura 3. Esquema 1 - Desenho do estudo, pg 73) teve uma base experimental, iniciando-se com suporte num estudo de caso, durante os anos letivos 2008/2009 e 2009/2010, com uma turma piloto lecionada pela investigadora num projeto dinamizado pela Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), no âmbito da experimentação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Com este estudo pretendeu-se reforçar a prática subjacente ao novo PMEB, como valorização efetiva das orientações ao nível da abordagem dos temas matemáticos, valorizando o sentido do número, o sentido espacial, o pensamento algébrico e a literacia estatística. Foram ainda analisadas as orientações referentes ao desenvolvimento das capacidades transversais de resolução de problemas, do raciocínio matemático e da comunicação matemática. De acordo com Ponte & Sousa (2010) a aquisição e reforço das capacidades transversais, porque as mesmas não se limitam apenas a objetivos curriculares mas vão mais além, são também visadas pelas orientações metodológicas que guiam a prática letiva.

Esta primeira fase da investigação abarcou a área de aprendizagem em crianças de 1º ciclo, de 1º e 2º ano de escolaridade, em trabalhos corporizados em diversidade de tarefas, representações, conexões, cálculo mental, fazendo relevar o lugar da Matemática no quotidiano de cada um. A opção foi recolher dados suscetíveis de serem analisados a partir dos relatos de aula e das grelhas síntese de cada sequência de tarefas trabalhada.

Os relatos de aula foram expressos em relatórios de categorização (Anexo D) que incidiram sobre as seguintes unidades de análise:

- Comunicação matemática (oral);

- Comunicação matemática (registo);
- Diferenciação de estratégias de trabalho;
- Construção de conhecimento a pares;
- Envolvimento inclusivo;
- Modelagem matemática;
- Diferentes níveis de aprendizagem.

No final de cada sequência de tarefas trabalhada, elaborou-se um balanço fazendo referência a: *Conhecimentos* (objetivos específicos de cada tópico em estudo), *Comunicação matemática* (oral e ao nível da representação) e *Capacidades e aptidões* (literacia matemática, conexões e autonomia). Estas duas últimas comuns a todas as grelhas, (Anexo E).

O estudo de caso foi desta forma justificado enquanto legitimador da prática pedagógica durante os dois anos letivos atrás mencionados. Mas, mais, ele constituiu-se como material para a análise qualitativa que permitiu fundamentar o lançamento da pergunta de partida da presente investigação.

Os seus resultados foram depois complementados com uma abordagem - quantitativa e qualitativa - mais geral, da temática, junto de professores experimentadores do novo PMEB.

Com efeito, o estudo de caso foi complementado pela análise de um conjunto de inquéritos por meio de uma seleção não aleatória[14] de professores (amostra). Pretendeu-se que o tipo de análise estabelecesse comparações entre a perceção das aprendizagens dos alunos, pelos professores inquiridos, antes da experimentação do novo PMEB e a mesma avaliação global dos seus alunos, após o trabalho no âmbito do novo programa.

Desta forma, o desenho deste estudo é suportado por uma metodologia mista: *quantitativa* e *qualitativa*. Assumiu uma metodologia qualitativa porquanto foram analisadas referências segundo o paradigma interpretativo ao abranger uma série de variantes descritivas e reflexivas, relevantes em todas as cambiantes analisadas de um mesmo fenómeno: a construção de significados de aprendizagem matemática. Em

[14] A amostra não aleatória inclui apenas os professores do ensino básico que tiveram experiência no âmbito da experimentação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

simultâneo e num modelo de análise cruzado foi assumida uma metodologia quantitativa, pela forma como foi analisada a progressão, baseada nos dados recolhidos nas grelhas de registo, no final de cada sequência de tarefas.

Ainda no âmbito deste enquadramento, organizámos o estudo numa amostra de professores experimentadores do novo PMEB, pretendendo uma análise mais abrangente, noutros contextos escolares e com outras formas de mobilizar o conhecimento didático, numa sala de aula, com o novo programa. A metodologia mista foi suportada através dos inquéritos efetuados online em

https://www.surveymonkey.com/s/B29S6C9.

A análise seguiu um processo diacrónico, recorrendo a metodologias próprias da aplicação de questionários numa base cruzada com os resultados da prática dos alunos, antes e após a experimentação do novo PMEB valorizando, neste caso, um conjunto de hipóteses avaliadas, como a aprendizagem e a sua relação como fator de inclusão, possibilitando assim uma investigação comparativa, como é comum no método experimental. Foi ainda considerada uma pergunta aberta, formulada no questionário para professores experimentadores, que procurava perspetivar alguns limites da abordagem quantitativa ao sugerir pistas para uma outra análise, tendo como referência o paradigma interpretativo.

Finalmente, face à escassez de respostas qualitativas ao questionário e ao seu conteúdo, considerou-se relevante o uso de outra técnica – o grupo focado – para aprofundamento das conclusões.

2 Objetivos

Com a realização desta investigação pretendeu-se alcançar os seguintes objetivos:

- Analisar a avaliação dos professores do Ensino Básico sobre as orientações metodológicas emergentes do novo PMEB.

- Analisar a relação entre a inclusão dos alunos e os níveis de aprendizagem no Ensino Básico.

- Analisar como as orientações metodológicas do novo PMEB se refletem na aprendizagem da matemática de alunos do Ensino Básico

- Contribuir para a melhoria do Ensino da Matemática no Ensino Básico.

Considerando a problemática em estudo e os objetivos previamente definidos, as hipóteses foram reflexões prévias, consequentes com a revisão da literatura antecedente e com os resultados da experimentação analisada que acionaram o decurso da investigação, e a sua confirmação ou infirmação com o modo de obter e legitimar novo conhecimento. Assim, ao assumirmos o desenho de estudo acima descrito pretendemos chegar a conclusões objetiváveis que contribuíram para a melhoria do conhecimento científico, de base experimental, decorrente da aplicação do novo PMEB.

> "As finalidades são explicar, controlar, predizer, baseando-se no pressuposto da neutralidade do investigador e na sua capacidade de obter a verdade. A realidade social, escolar é utilizada como um dado externo, singular, tangível, fragmentável, convergente e, por isso, objectivável" (Amaral, 2003)

i Hipótese geral (HG)

O ambiente e o contexto numa sala de aula, a formação de professores e um trabalho colaborativo são contributos capazes de reduzir o insucesso na matemática e promover a inclusão.

ii Hipóteses Operacionais

As hipóteses operacionais a considerar foram as seguintes:

H01 - A frequência no Programa de Formação Contínua de Matemática para Professores do Ensino Básico, está diretamente correlacionada com:

- Os resultados dos alunos

- A inclusão dos alunos.

H02 - A preparação de uma sequência de tarefas, está diretamente correlacionada com:

- Os resultados dos alunos
- A inclusão dos alunos.

H03 - A frequência de trabalho colaborativo está diretamente correlacionada com:

- Os resultados dos alunos
- A inclusão dos alunos.

H04 - A frequência da comunicação matemática, em sala de aula está diretamente correlacionada com:

- A aprendizagem dos alunos
- A inclusão dos alunos.

H05 - Regista-se um efeito diferencial positivo nos resultados obtidos pelos alunos de um mesmo professor com e sem aplicação do novo Programa da Matemática

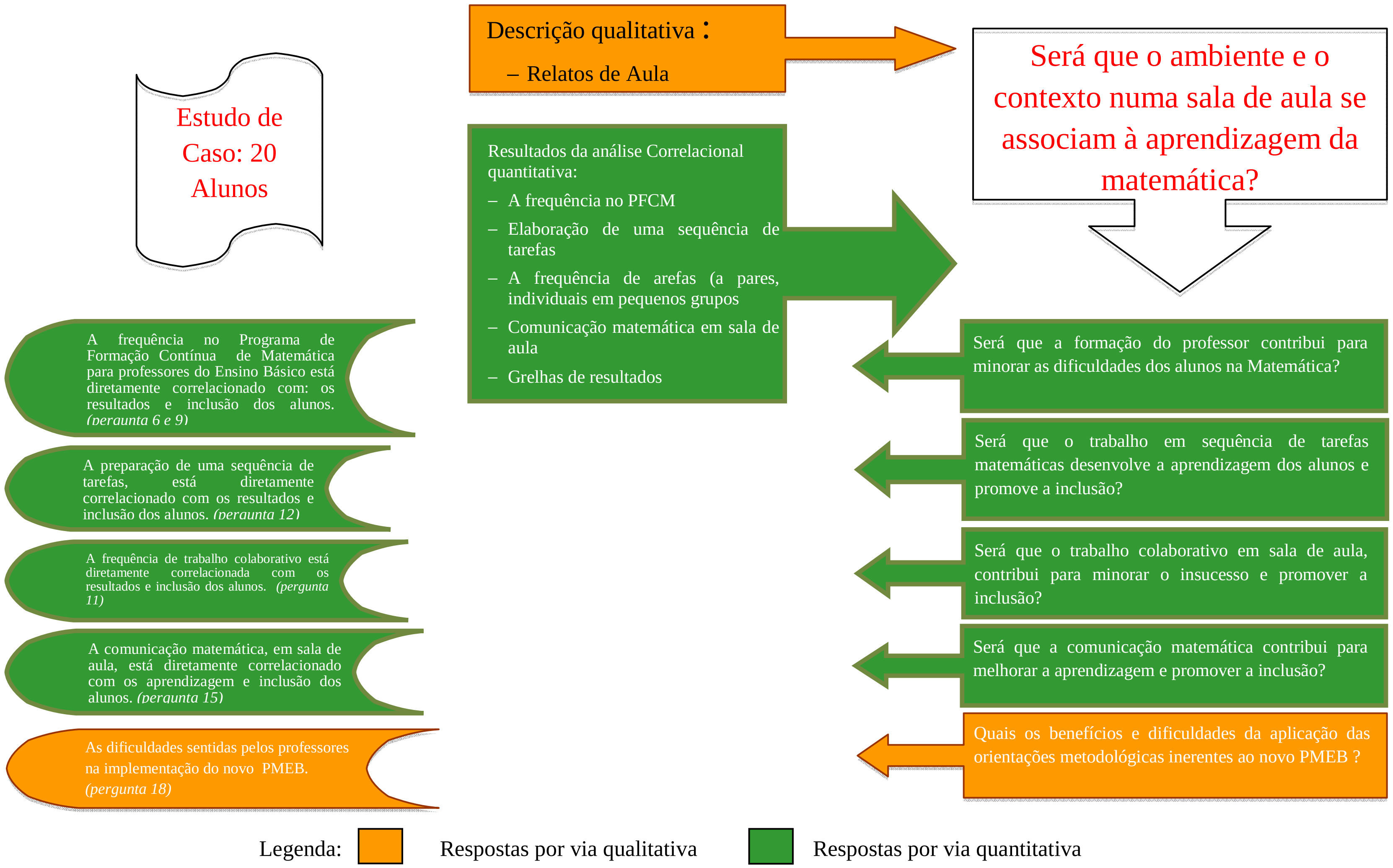


Figura 3: Desenho do estudo

Hipótese Geral	Hipóteses Operacionais	Variáveis	Categorias			Funções
		Nome	Tipo	Domínio	Escala	Indicadores
HG1 - O ambiente e o contexto num sala de aula, a formação de professores e um trabalho colaborativo são contributos capazes de reduzir o insucesso na matemática e promover a inclusão	HO1- O grau de preparação da sequência de tarefas observado em sala de aula está diretamente correlacionado com: - O nível de resultados do aluno - O nível de inclusão dos alunos	O grau de preparação da sequência de tarefas	métrica	Média de pontos de (1 a 5)	Likert	Coeficiente de Correlação
	HO2- O grau de aplicação dessa mesma sequência de tarefas está diretamente correlacionado com: - O nível de resultados do aluno - O nível de inclusão dos alunos	O grau de aplicação da sequência de tarefas				
	HO3 - O grau de comunicação na sala de aula está diretamente correlacionado com: - O nível de resultados do aluno - O nível de inclusão dos alunos	O grau de comunicação na sala de aula				
	HO4- O nível de resultados obtidos pelos alunos de um mesmo professor com e sem aplicação do novo Programa da Matemática é diferenciado, sendo em média superior com a nova metodologia.	Número de anos de Formação no âmbito do novo PMEB	métrica	Média de pontos de (1 a 5)	1 a 5	
	HO5- O nível de resultados obtidos pelos alunos com a nova metodologia está directamente correlacionado com o número de anos de frequência no Programa de Formação Continua em Matemática para Professores do Ensino Básico.	Nível de resultados diferenciado	métrica	1,2,3	1,2,3	variância

Tabela 1 : Quadro de operacionalização (Anexo B)

3 Generalidades processuais

O processo iniciou-se com uma pesquisa bibliográfica e revisão crítica da literatura científica relevante e recente cuja finalidade foi, por um lado, construir um corpo de conceitos e afirmações que pudesse constituir o suporte teórico para o desenvolvimento da nossa investigação e, por outro lado, evidenciasse lacunas ou contradições determinando a oportunidade e interesse desta investigação. Decorrente da pesquisa e da análise feita foi posteriormente possível construir um quadro de exploração, que nos pudesse levar à delimitação do tema, após o qual foi formulada Pergunta de Partida (PP) e respetivas Questões Derivadas (QD). A projeção final do modelo de análise foi construída pela definição das hipóteses (HIP) orientadoras do estudo na sua vertente quantitativa e de temas (T) orientadores de aprofundamento qualitativo e que, na sua implementação, nos levaram às conclusões da nossa investigação.

Assim neste capítulo é apresentada a pergunta de partida, como ponto central de onde emergem as restantes questões derivadas, no âmbito do objetivo de investigação, na tentativa de apresentar uma justificação à luz do paradigma interpretativo de investigação. Posteriormente, procedeu-se à apresentação de caminhos percorridos durante o estudo e a premência que determinados processos de análise suscitam na complementaridade de outras análises. Será ainda mencionada a característica da amostra e a sua relevância no estudo.

4 Identificação e desenvolvimento da pergunta de partida

Tendo como base orientadora as indicações metodológicas do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, a pergunta de partida que orientou a presente investigação foi a seguinte:

PP - Será que o ambiente e o contexto numa sala de aula se associam à aprendizagem/ inclusão na Matemática?

Desta pergunta emergiram quatro questões derivadas:

QD1 - Será que a formação do professor contribui para minorar as dificuldades dos alunos na Matemática?

QD2 - Será que o trabalho em sequências de tarefas matemáticas desenvolve a aprendizagem dos alunos e promove a inclusão?

QD3 - Será que o trabalho colaborativo em sala de aula, contribui para minorar o insucesso e promover a inclusão?

QD4 - Será que a comunicação matemática, contribui para melhorar a aprendizagem e promover a inclusão?

5 - Universo experimental

i Alunos - Estudo de caso

O universo de estudo foi constituído pelos resultados das aprendizagens dos alunos que trabalharam, na sala de aula segundo as orientações metodológicas do novo PMEB e seus professores, constituindo dois subuniversos.

Conforme ao nosso plano metodológico, realizámos um estudo de caso numa turma piloto de 20 alunos, inicialmente com idades compreendidas entre os 5 e os 7 anos (figura 2) e lecionada pela investigadora (Anexo A). O estudo de caso decorreu durante dois anos letivos, 2008/2009 e 2009/2010, e desenvolveu-se no âmbito da experimentação do novo PMEB. De referir que a turma incluía oito alunos com Necessidades Educativas Especiais[15] (NEE), o que veio a condicionar alguns níveis de análise nomeadamente os relativos aos processos inclusivos e a sua relação com a aprendizagem.

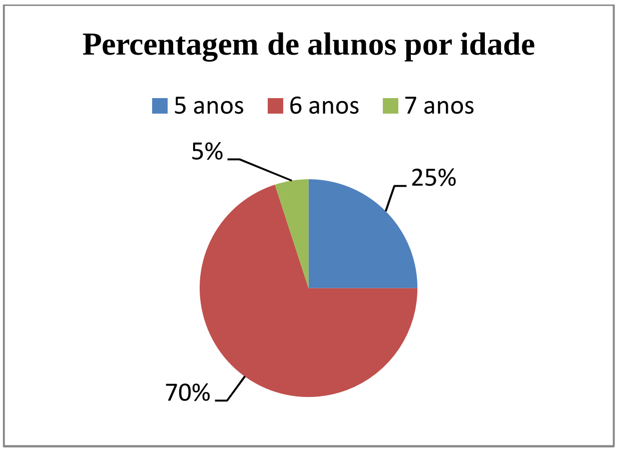


Gráfico 3: Caracterização da amostra (turma)

ii Docentes - Professores experimentadores

O segundo subuniverso, que permitiu uma maior compreensão e enriquecimento do estudo - foi constituído pelos respondentes ao lançamento de inquéritos *online* - sendo a

[15] disfunções sócio-afetivas, DHDA, aluno com acompanhamento em pedopsiquiatria, Asperger, perturbação de autismo, défice cognitivo com défice de atenção, défice cognitivo com dislexia e défice de atenção grave.

amostra inquirida constituída por 100 professores experimentadores do novo PMEB, dos três ciclos do Ensino Básico, dando voz à prática do estudo em contextos diversos.

	Funções docentes					Sexo		Idade	Habilitações académicas					Tempo de serviço	Frequência no PFCM							Experiência aplicação do novo PMEB	
Professores inquiridos	Ensino Regular	Apoio Educativo	Iº Ciclo	2º ciclo	3º ciclo	Masculino	Feminino	26 a 61	Bacharelato	Licenciatura	Especialização	Mestrado	Doutoramento	1 a 28	71 Sim					23 Não	6 Auto-formação	Sim	Não
	24	2	66	10	10	14	86		7	69	9	15	0		Menos de 1 ano	1 ano	Mais de 1 ano	2 anos	Mais de 2 anos			100	0

Tabela 2: Caracterização da amostra (professores experimentadores

Conforme se verifica pela leitura da Tabela 2, todos os inquiridos têm experiência na aplicação do novo PMEB. 66% dos inquiridos lecionam no 1º Ciclo e 24% no Ensino Regular; 86% são do sexo feminino. As idades dos docentes estão compreendidas entre os 26 e os 61 anos, (desvio padrão 7,77)[16] e entre 1 a 28 anos de serviço (desvio padrão 9,04).

É de salientar que 71% dos professores inquiridos frequentaram o PFCM, sendo que 67% o fizeram durante um ano ou mais.

6 Fontes, técnicas e instrumentos de recolha e validação de dados

O trabalho de investigação iniciou-se, como referido anteriormente, com leituras de artigos, brochuras e livros de alguns dos autores e coautores de referência ao nível do sentido matemático e sua correlação com a aprendizagem, nomeadamente com as abordagens às atitudes inclusivas como modelo emergente do novo PMEB. Procurou-se investigar pareceres de autores de referência que de alguma forma apresentaram contributos para dinamizar a aula de Matemática, em práticas de trabalho colaborativo/cooperativo, numa interação capaz de promover a comunicação e a aprendizagem, em confronto com autores apologistas de uma metodologia diretiva, que

[16] Anexo J

defendiam uma aprendizagem estruturada pelo treino de procedimentos e operações básicas.

Os instrumentos de recolha de dados incidiram sobre três fontes primárias:

- Os questionários aos professores experimentadores;
- Grelhas de categorização dos relatos de sala de aula;
- Grelhas de avaliação/balanço no final de cada sequência de tarefas.

A análise de respostas aos questionários teve como principal objetivo o de estabelecer uma comparação ao nível de aprendizagens e inclusão dos alunos, antes e após a experimentação. Um outro aspeto que acresce na análise do inquérito refere a forma como as pessoas interagem movidas pelos significados que atribuem a objetos, pessoas e contextos, sendo estes construídos pela própria interação e interpretação do sujeito (Almeida & Freire, 2000).

Previamente procedeu-se à conceção e elaboração do questionário baseado no estudo pretendido e nas hipóteses atrás mencionadas, tendo em conta dois aspetos: consistência e validação.

O inquérito era composto por dezoito perguntas, sendo a última uma pergunta aberta e facultativa na opção de resposta. Na fase inicial procedeu-se à validação do questionário visando a sua otimização quanto aos objetivos pretendidos. Foi efetuado por uma parcela de 17 professores pertencentes à amostra

https://www.surveymonkey.com/s/3XWRYYT.

Após a análise das respostas tendo em conta a coerência das questões/resposta em relação aos objetivos do estudo, foi elaborado um relatório de avaliação (Anexo G). Em simultâneo foi enviado o questionário a especialistas (7) no domínio técnico-científico em investigação da Universidade Fernando Pessoa,

https://www.surveymonkey.com/s/WSQ7KL3, onde se solicitava a validação do instrumento de inquirição mediante a apreciação, de cada questão, quanto ao grau de compreensão, objetividade, neutralidade e aplicabilidade. Foi também elaborado um relatório com as sugestões do painel quanto à coerência e validação do inquérito (Anexo H).

Finalmente elaborou-se o questionário definitivo integrando as alterações sugeridas https://www.surveymonkey.com/s/B29S6C9.

Foi então solicitada a autorização aos Diretores de Agrupamentos para facultar o encaminhar do link https://www.surveymonkey.com/s/B29S6C9 para o Departamento de Matemática e assim poder chegar a todos os docentes que lecionam a disciplina de Matemática, no âmbito do novo PMEB.

A segunda fonte primária decorreu da mais valia emergente de várias fontes de dados para um estudo que se pretende com significado, num outro instrumento de análise, o estudo de caso. Assim, recolhemos também informação mais detalhada em grelhas de categorização baseadas em relatos de aula (Anexo D1), com avaliação de resultados ao nível do Conhecimento, Comunicação e Capacidades e Aptidões, elaboradas no final de cada sequência de tarefas, (Anexo E) dos dois anos letivos de trabalho, numa turma piloto no âmbito da experimentação do novo PMEB.

A validade de uma investigação, segundo a tradição positivista está relacionada com a possibilidade de generalização e a esta estão subjacentes critérios de validade. No nosso estudo, no âmbito das ciências da educação, das ciências ditas sociais, o estudo torna-se muito mais abrangente. Prefigura-se uma multiplicidade de fatores, quer sociais, quer motivacionais, quer de significados que põe em causa a generalização de resultados, no sentido de transferir para outros contextos, as conclusões retiradas de um estudo particular.

Assim, pareceu-nos que um estudo baseado nestas duas realidades traria maior credibilidade, entendida como garantia de confiança na *validade* dos resultados: observação e envolvimento prolongado, triangulação e adequação dos materiais de referência (Colas, 1992, Erickson, 1986, Lincoln & Guba, 1985).

7 Técnicas e instrumentos de análise de dados

Um estudo de caso pode ser considerado uma fonte direta de dados, num ambiente genuíno, podendo o professor, neste caso, constituir o instrumento principal de recolha de dados. Assim sendo, todos os pormenores observados ou registados têm significado o que pressupõe uma exigência ao investigador no sentido de deixar transparecer uma abordagem objetiva. Para a recolha de informação em estudos de caso é desejável recorrer a várias fontes de informação, não se limitando a uma evidência singular (Yin, 1989).

Tendo em conta o espólio de dois anos de experimentação com o novo PMEB e o objetivo pretendido com esta investigação, utilizaram-se alguns métodos de recolha de dados: *Relatos de aulas* e *Grelhas de resultados*. Para apresentação dos resultados entendeu-se fazer quadros síntese, gráficos e tabelas que facilitam a leitura e a interpretação global dos resultados registados[17].

[17] Os resultados registados encontram-se no anexo D1, E

Capítulo IV Discussão dos resultados

1 Relatos de aulas

A análise dos relatos de aula seguiu um percurso cronológico incidindo em nove relatos de aula, cinco do 1º ano e 4 do 2º ano de escolaridade tendo sido categorizados nas seguintes unidades de análise

- Comunicação Matemática (oral);
- Comunicação em registo;
- Trabalho diferenciado (conforme o perfil do aluno);
- Construção do conhecimento a pares;
- Envolvimento inclusivo;
- Modelagem matemática;
- Diferentes níveis de aprendizagem.

Os relatos de aula foram escritos durante o período de experimentação do novo PMEB, em tarefas de investigação, onde o par pedagógico redigia os diálogos que mais evidenciavam o envolvimento de todos os alunos numa mesma tarefa matemática, que promoviam o desenvolvimento e a discussão da tarefa, bem como o cumprimento das intenções mencionadas na planificação. Eram relatos descritivo-analíticos das aulas (Anexo D) que organizados em unidades de análise nos permitiram ligar estas unidades às já formuladas anteriormente, referenciadas na teoria.

Quer a resolução de problemas, quer as tarefas exploratórias, que compuseram os nove relatos de aula analisados foram narrados em episódios de argumentação mais significativa, associados à importância do papel dos alunos na atividade matemática, no testar conjeturas, na pertinência das questões, *narradas* em 377 frases retiradas da descrição das mesmas. É de realçar a significativa diferença entre as primeiras categorias analisadas e as categorias analisadas nos últimos relatos de aula.

De relevar que a elaboração dos relatos de aula teve como objetivo inicial, o *feedback* da experimentação do novo programa de Matemática. Daí a seleção dos registos apresentados nos relatos de aula se cingir a exemplos de procedimentos de cálculo ou modelos que fizeram mais sentido para os alunos e que para nós, professores, levaram a uma reflexão sobre a prática. O critério para registo de aulas assentou em fatores absolutos, ignorando eventuais critérios diferenciadores decorrentes da existência de alunos com NEE (Necessidades Educativas Especiais). Foi relevante o posicionamento destes alunos na participação em diversas atividades, que de todo, não tinham considerado quaisquer diferenças substantivas ao nível do perfil cognitivo dos alunos. A categoria *Envolvimento Inclusivo* não tinha sido um fator relevante no início do processo, e daí estar incluído em apenas 8 % das tarefas. No entanto, verificámos ao longo do processo um nível de envolvimento[18] coletivo dos alunos nas diversas tarefas, independentemente dos seus patamares de realização, o que de facto nos fez relevar o caráter inclusivo das novas orientações metodológicas. Em síntese, o processo foi evoluindo na análise das categorias, porquanto nos relatos de aulas fomos identificando este facto superveniente e daí a relevância crescente que o processo inclusivo passou a merecer na nossa investigação.

Desta forma, tendo em conta os pressupostos anteriores, a não intencionalidade neste estudo aquando da descrição do relato de aula, permitiu que eles se apresentem com a imparcialidade, autenticidade e fidelidade próprias para uma investigação. Decorrente deste primeiro objetivo[19], veio a surgir o presente estudo com a finalidade de procurar valorizar as orientações metodológicas do novo PMEB, pelo alcance positivo no ensino da Matemática para todos.

Em todos os processos analisados foi nosso propósito criar um ponto de partida, uma determinada situação que permitisse que o aluno criasse os seus próprios percursos de resolução, refletindo sobre a validade dos mesmos, justificando ou questionando julgamentos matemáticos, num processo de desenvolvimento de estratégias, onde todos os alunos puderam participar representando os seus esquemas mentais em registos mais ou menos elaborados. Foi este o nosso propósito na preparação de atividades de investigação.

Inicialmente adequou-se uma tarefa pensando num pequeno grupo de alunos e prevendo alguma indolência pela dificuldade na realização. Foi notório, na análise dos relatos de aula, que esse propósito foi abandonado pelo fator favorável de todos estarem a pensar

[18] O processo inclusivo identificado detinha no entanto diferentes níveis de realização

[19] *Feedback* da experimentação do novo programa de Matemática

num mesmo contexto, numa mesma situação. A heterogeneidade da turma alargou a reflexão pela observação sobre processos dos níveis anteriores (Abrantes, 1994, *cit. in* Freudenthal 1978).

Segundo Ernest (1996), ao analisarmos o seguinte quadro compreendemos que à medida que o percorremos no sentido descendente há uma maior valorização do papel do aluno e um menor envolvimento do professor no processo ensino-aprendizagem.

Método	Papel de professor	Papel do aluno
Descoberta guiada	- *Formula o problema ou escolhe a situação com o objectivo em mente.* - *Conduz o aluno para a solução ou objectivo.*	- *Segue a orientação.*
Resolução de problemas	- *Formula o problema.* - *Deixa o método de solução em aberto.*	- *Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema*
Abordagem Investigativa	- *Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).*	- *Define os seus próprios problemas dentro da situação.* - *Tenta resolver pelo seu próprio caminho*

Tabela 3: Uma comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (segundo Ernest, 1996, p. 32)

Passando agora a um processo de análise e tomando como referência o (Anexo D.1) *Esquema de análise dos relatos de aula* verificamos que, nos primeiros relatos, a *Comunicação* era um fator a desenvolver. Com o decorrer do desenvolvimento do percurso escolar verificámos que a comunicação foi ganhando maior relevância no processo de aprendizagem, pelo que o *crescimento* dos alunos foi sendo um fator determinante para que passasse a existir um maior à vontade e um gosto de intervenção e participação em todas as tarefas matemáticas por parte dos alunos, pelo que, de facto, o trabalho de interação e comunicação permanente entre todos os elementos presentes na aprendizagem, alunos e docente, passou a constituir, no nosso entendimento, um dos grandes catalisadores da aprendizagem no PMEB. Verificámos que passou a existir uma perceção mais evidente de alguns ajustes de processos, ou mesmo de dificuldades, expressa pela leitura de raciocínios subjacentes ao *como* e *porque* da resolução, decorrente de um ambiente de abertura na sala de aula. A comunicação foi suportada em dois níveis de registo*: Comunicação Matemática (oral)* e *Comunicação em Registo*. A operacionalização e importância do modelo de análise da comunicação foi crescendo à medida que íamos tomando consciência de que o processo ia ganhando contornos de maior consistência ao nível de uma análise mais formal, e que necessitava de uma evidência mais experimental. Assim, a reflexão sobre o *Esquema de análise dos relatos de aula*, considerando a conjugação cumulativa da *Comunicação Matemática (oral)* (17 %) e da *Comunicação em Registo* (19%), e se a estas associarmos ainda toda a comunicação não registada, verificamos que de facto a comunicação passou a ser uma das categorias relevantes do novo PMEB, transversal em todo o processo de ensino-aprendizagem. Ainda verificámos que a comunicação, no seu conjunto, foi apresentando índices crescentes no processo de aprendizagem. Entendemos assim que, pelo reforço da comunicação, passou a ser possível criar um clima de abertura, em que o diálogo e perceção dos problemas e dificuldades dos alunos passaram a ser entendidos com mais realismo pelo docente, e que desta forma passaram a estar mais presentes em termos pedagógicos e deste modo a interferir nos processos de aprendizagem de forma mais adequada.

Relativamente ao *Trabalho Diferenciado*, fomos inicialmente tentados a criar um modelo de diferenciação para alguns alunos que manifestavam maiores dificuldades de aprendizagem com o objetivo de procurar um modelo próprio. No decurso das primeiras aulas rapidamente verificámos que a diferenciação seria um modelo a abandonar, porquanto era visível uma desmotivação nos alunos alvo, o que de todo não poderia ser um caminho a prosseguir. Esta categoria foi no entanto, por vezes e em casos muito pontuais e de maior complexidade, desenvolvida em percursos diferenciados, embora de forma muito esbatida. O que estava em causa eram os dados numéricos e não os enunciados e as tarefas em análise. Podemos concluir que todos os alunos participaram numa mesma tarefa matemática, não sendo visível o trabalho diferenciado. Dos registos mais significativos apresentados (19%), (21%) diziam respeito a crianças com dificuldade de aprendizagem.

A diferenciação de estratégias foi talvez o ponto mais evidente marcado quase pela ausência, por revelarem nos alunos algum desconforto com a diferenciação. Este aspeto foi gerido pela motivação dos alunos em trabalho cooperativo e com ideia de que todas as estratégias de resolução eram aceitáveis e *dignas* de serem apresentadas ao grande grupo, podendo depois sofrer alguns reajustes, pelos contributos dos colegas, ponto comum em todas as aulas e com todos os alunos, independentemente das aptidões de cada um. Assim verificámos que o *Trabalho Diferenciado* constituiu uma categoria residual e passou a ser um fator de somenos importância nas orientações metodológicas emergentes do novo PMEB. Talvez salientar aqui que não resultou o Trabalho Diferenciado mas sim a Comunicação Diferenciada, como diz acima. Houve diferenciação natural, conduzida pelos próprios alunos diferentes, tendo a professora assumido e encorajado nos pares a aceitação plena dessas diferenças.

O *Trabalho a Pares* foi também um fator que influenciou positivamente o envolvimento de todos e a aprendizagem. (Johnson & Jonhson (1990) e Davidson (1990) justificam o trabalho a pares ou em pequenos grupos especialmente adequado à aula de Matemática, pela dimensão social atribuída à aprendizagem da Matemática, pela oportunidade de entreajuda que conduz ao sucesso, pelo ambiente que permite a discussão dos problemas de Matemática justificando e argumentando estratégias de resolução, pela diversidade de estratégias de resolução, pelos momentos ricos na exploração de situações abertas, no testar conjeturas, e até na capacidade de lidar com problemas que ao nível individual poderiam desmotivar alguns alunos. Assim, o trabalho foi visto *como um empreendimento social* para o qual todos os alunos contribuíram, com igualdade de oportunidades e de responsabilidades (Abrantes, 1994, *cit. in* Dewey 1938). O trabalho a pares e a comunicação em grande grupo teve grande impacto na construção do conhecimento (21%), o que de facto nos releva a importância do trabalho a pares no processo de aprendizagem. De salientar que o trabalho a pares não significava que os dois alunos apresentassem um registo idêntico, maioritariamente seguiam estratégias diferentes ainda que as opiniões trocadas entre eles, pudessem influenciar as tomadas de decisões.

Quanto aos *Níveis de Aprendizagem* verificámos igualmente que no início eram evidentes as diferenças, mas com o decorrer do desenvolvimento do percurso escolar passámos a assistir a uma convergência, chegando a um momento em que os patamares de realização, embora com diferentes índices e formas de resolução, eram igualmente atingidos por todos os alunos.

Também a *Modelagem Matemática* foi mais um potencial de conhecimento (16%) em que a tarefa matemática passou a desafiar o aluno para a representação dos seus esquemas mentais, baseado nos conhecimentos informais, mas que podem ser usados como ferramentas para a resolução de problemas. Estes modelos inicialmente emergiram de representações da ação numa determinada situação. Numa fase seguinte estas representações de ações evoluem para representações da situação e finalmente evoluem para uma representação simbólica da própria *matematização*, a generalização da aprendizagem (Fosnot & Dolk, 2001).

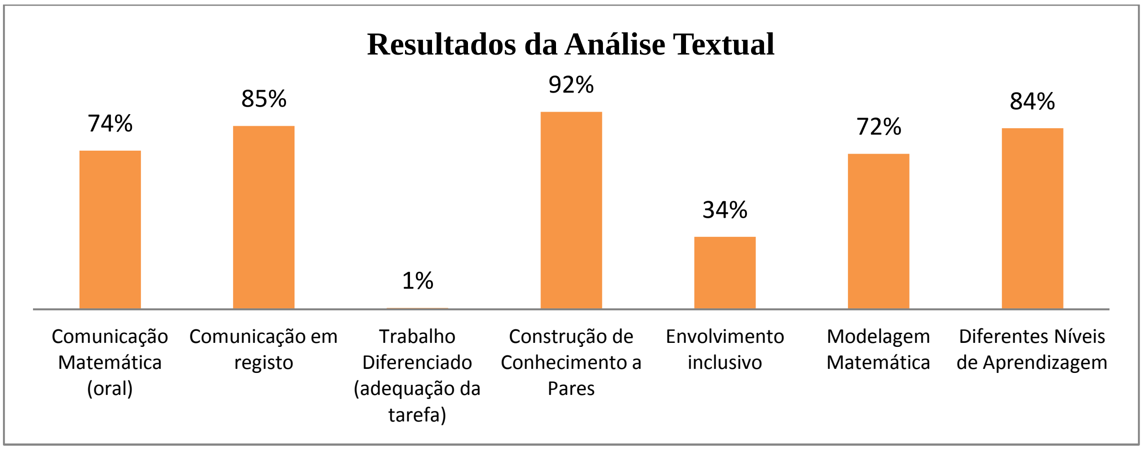


Gráfico 4:[20] Categorias analisadas nos relatos de aula

Não podemos terminar esta análise às diferentes categorias sem deixar de relevar que toda esta categorização só pode ser entendida como um processo interligado em que, como nos refere (Ponte & Serrazina,2000), a *tarefa de investigação* matemática constituiu o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática dos alunos. Ali estão presentes várias categorias, sem grande discrepância de representação, o que nos leva a concluir que processos de resolução de problemas a investigar envolvem o aluno em processos complexos de pensamento bem como mobilizam níveis cognitivos elevados nos alunos, em categorias que encaixam numa espiral de processos matemáticos adequados à situação apresentada.

Reforçando agora o conceito e a importância da investigação na aprendizagem, Oliveira (1998), de forma simples representa, na figura 4, os processos matemáticos presentes numa atividade de investigação. Estes processos podem ser percorridos ou interrompidos, sempre que se sinta a necessidade de rever ou inverter percursos, sem

[20] Síntese do esquema de análise dos relatos de aula – Anexo D1

ordens pré-estabelecidas ou com grau de profundidade dependente das situações e do contexto da aula.

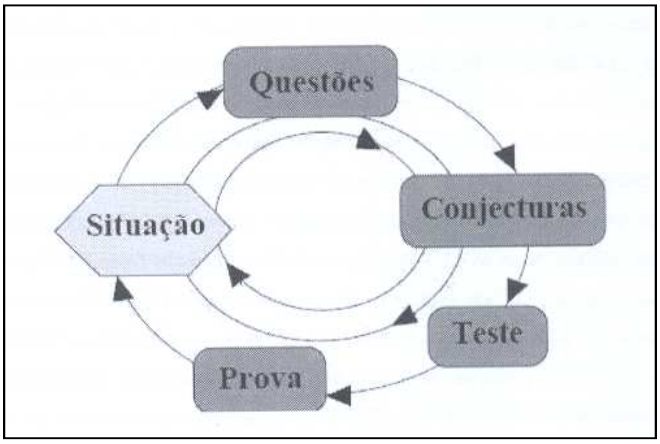


Figura 4: A atividade de investigação (Oliveira, 1998 p. 15)

Assim compreendemos a falta de linearidade (Brocardo, 2001) no processo investigativo, também visível na composição gráfica que representa as unidades de estudo categorizadas em diferenciais muito presentes e sem grandes discrepâncias.

Em síntese, numa análise global verificámos então que, pela aplicação dos processos nas suas diferentes categorias, o desenvolvimento da aprendizagem da matemática foi facilitado por um modelo mais cooperativo, mais comunicativo e sobretudo assente em modelos emergentes das conexões matemáticas que os alunos são levados a descobrir. Por outro lado, a diferenciação não deverá ser processo sistemático, porquanto poderá levar a desmotivações e a diferentes percursos formativos, pouco ou nada desejáveis ao nível psicológico e de autoestima dos alunos com menos capacidades cognitivas. Desta realidade emerge então a importância do trabalho a pares como fator potenciador da aprendizagem e necessariamente da promoção da inclusão nos processos de aprendizagem. Mas sobretudo um dado comum desde o início foi a envolvência de todos numa mesma tarefa matemática, e daí a relevância que lhe atribuímos, ainda que a turma apresentasse desníveis acentuados de realização com oito crianças com dificuldades de aprendizagem.

2 Grelhas de resultados dos alunos

As grelhas (Anexo E) representam os resultados dos alunos no final do trabalho de cada tópico nas seguintes categorias:

- Conhecimento;
- Comunicação;
- Capacidades e aptidões

Os resultados apresentados funcionaram como uma fonte de informações, como um ponto de partida e não um ponto de chegada. As informações recolhidas num ambiente de sala de aula, por meios informais como a colocação de questões, o formular conjeturas, válidas ou não mas com intencionalidade de serem testadas, até os comentários, levam-nos a nós professores a tomadas de decisão sobre como conduzir a prática seguinte (NCTM, 2007).

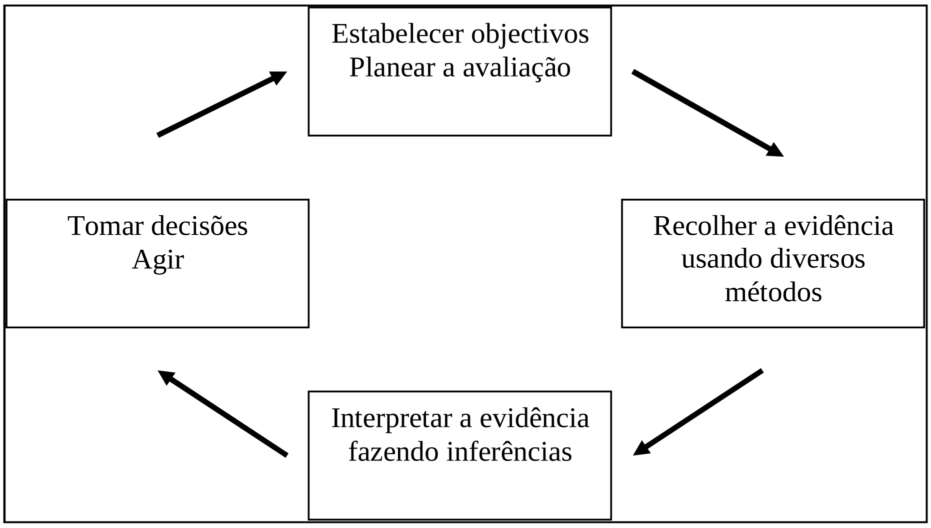


Figura 5: Momentos principais do processo de avaliação, segundo o NCTM (1998), segundo Ponte & Serrazina (2000)

Depreendemos que os resultados apresentados nas grelhas não poderão ser analisados para determinar apenas as aquisições dos alunos, mas o desenvolvimento deste grupo de alunos no trabalho em sala de aula à luz da metodologia inerente ao novo PMEB.

Para efeitos de um entendimento comum sobre cada uma das categorias importa referir que a categoria *Conhecimento (saber)* refere alguns dos objetivos específicos do tópico trabalhado.

A *Comunicação* engloba, em todas as grelhas, três itens de análise: participação contextualizada, interpretação de enunciados matemáticos formulados oralmente e a capacidade de expor oralmente estratégias de resolução.

Na análise seguinte, das *Capacidades e Aptidões*, tal como no item anterior os parâmetros de avaliação mantinham-se comuns independentemente do tópico trabalhado: o desenvolvimento de alguns aspetos relacionados com o trabalho individual (autonomia e confiança),o estabelecer relações entre conceitos matemáticos e o realizar e interpretar diferentes tipos de representações.

Tal como foi mencionado anteriormente, a conceção destas grelhas tinha como única finalidade o repensar dos aspetos mais relevantes da prática em sala de aula, no âmbito da experimentação do novo PMEB, tendo como base os trabalhos dos alunos.

	Conhecimentos (Saber) Escala de avaliação 1 a 3			Comunicação Matemática (saber comunicar) Escala de avaliação 1 a 3			Capacidades e Aptidões (saber fazer) Escala de avaliação 1 a 3		
	D1 - 1º Período	D2 - 2º Período	D3 - 3º Período	D1 - 1º Período	D2 - 2º Período	D3 - 3º Período	D1 - 1º Período	D2 - 2º Período	D3 - 3º Período
Médias 1ª Ano	2,55	2,65	2,5	2,4	2,33	2,28	1,98	2,28	2,25
Médias por categoria	2,57			2,34			2,17		
Média Total	2,36								
Médias 2ª Ano	2,58	2,51	2,43	2,21	2,31	2,35	2,18	2,31	2,43
Médias por categoria	2,51			2,29			2,31		
Média Total	2,37								

Tabela 4: Resumo da avaliação dos alunos nos dois anos de experimentação do PMEB

Os resultados dos alunos foram analisados como fontes de informação, em tabelas síntese onde foram registadas as médias de cada aluno, por trimestre (D1, D2 e D3) para os dois anos letivos. Os restantes dados encontram-se na totalidade das grelhas (Tabela 4).

Começando por analisar os dados referentes às médias alusivas às três categorias (Conhecimento, Comunicação e Capacidades e Aptidões) ressalta-nos a ideia de um decréscimo nas categorias *Conhecimentos* e *Comunicação matemática*, contudo este é o reflexo de um desnível verificado num grupo tão heterogéneo, apoiado numa avaliação mais rigorosa.

Observando a grelha de resultados[21] ao nível dos *Conhecimentos*, verificamos que foi obtida uma média de 2,55. Um dado que não nos é indiferente situa-se na sobrevalorização de alguns alunos, no 1º ano, no final do primeiro trimestre (dos 20 alunos 11 tiveram média de 3,00). Se comparada com idêntica avaliação no início do 2º ano, foi notória uma normalização das classificações, com um aumento para (2,58) *Bom*, não tendo, no entanto, sido atribuída nenhuma classificação média de 3,00, facto que se materializa numa diminuição da amplitude avaliativa dos alunos pela uniformização dos conhecimentos gerais da turma. Em termos gerais os *Conhecimentos* apresentam uma média de *Bom* (2,57) ao longo do 1º ano. Em contrapartida as outras categorias apresentam uma média de 2,34 e 2,17 respetivamente, ou seja um resultado *Médio*. Para compreendermos estes resultados não podemos separar os conhecimentos da turma numa observação e acompanhamento diário. Logo esta análise não pode ser só interpretada ao nível quantitativo pois corríamos o risco de ser redutores. O paradigma qualitativo, abarca uma série de cambiantes, tendo como elemento comum a conceção do conhecimento científico individual, considerando cada contributo como parte significativa e os contextos com significados determinantes. É uma metodologia de cariz interpretativo, pela procura de significados nas experiências (Menezes & Ponte *cit. in* Guba & Lincoln 1998).

Assim poderemos afirmar que a média do primeiro ano dos *Conhecimentos* poderá ser atribuída aos conteúdos mais simples de quem inicia a escolaridade, aos conhecimentos trazidos do jardim de Infância e também aos conhecimentos informais de um grupo significativo de alunos que, oriundos de ambientes de baixo poder económico, trazem para a escola uma riqueza de conhecimentos informais aos quais a Matemática também se associa.

Contudo todos os alunos, incluindo os alunos com Necessidades Educativas Especiais, terminaram o 2º ano com média superior a 1,5 (Médio).

No que se refere ao 2º ano a média decresce ligeiramente (2,57 para 2, 51). Este facto decorre, no nosso entendimento, da forma como a gestão desses conhecimentos foi feita pelos alunos. Ou seja, numa turma onde há alunos com dificuldades cognitivas, não nos parece descontextualizado afirmar que as competências para demonstrar esses

[21] Anexo E

conhecimentos não decorrem de forma tão linear como nos alunos sem problemas de aprendizagem. Se a avaliação é feita em médias este fator não fica indiferente. Um outro fator que interferiu na média dos *Conhecimentos* foi a intenção inicial no preenchimento das grelhas: avaliação dos conhecimentos ao nível dos objetivos específicos do tópico trabalhado. O aluno constrói o seu conhecimento num tempo continuado, não imediato, que decorre das conexões entre tópicos, onde a justificação de raciocínios leva o aluno a rebuscar estratégias e significados matemáticos já trabalhados consolidando e legitimando processos que, a seu tempo altera o seu património de conhecimentos. Assim, os modos de pensar são colocados em evidência apoiando-se na lógica para os legitimar, contudo a construção de conhecimentos depende da observação, da simulação e da experimentação (National Research Council, 1989). Outro aspeto a ter em conta consiste no facto de que todos os alunos participaram e trabalharam na mesma tarefa matemática e a aplicação dos conhecimentos, pelos alunos, não é uniforme. Se ao nível das competências tal não é verificável, todos recorrem a estratégias mais ou menos elaboradas ou até em registos icónicos. Ao nível dos conhecimentos estamos num campo mais abrangente onde as conexões têm que estar presentes para que o conhecimento tenha significado. Aqui a diferenciação foi visível e alterou a média geral da turma. O modo de construção do conhecimento está ligado à tarefa matemática como oportunidade de aprendizagem que se vai construindo em tempo, quer para explorar e descobrir por si mesmo, quer com o apoio dos colegas em negociações, quer com o apoio do professor (Ponte, 2004).

Analisando a categoria *Comunicação Matemática* percebemos, face aos resultados apresentados durante o 1º ano letivo (2,40, 2,33 e 2,28), que foi um processo que levou algum tempo a ser organizado e compreendido. Existiu uma permanente dificuldade em normalizar as intervenções contextualizadas, pelas oscilações próprias de quem inicia experiências de ouvinte, numa linguagem matemática que não domina. Assim, houve necessidade de ajudar a comunicar sobre matemática, proporcionar o espaço para que os alunos partilhassem as suas ideias de forma clara e sem a preocupação de poderem estar a ser testados, sem interrupções de *certo* ou *errado*, desenvolvendo a compreensão do pensamento de quem o expõe, promovendo a melhoria das intervenções pela motivação e não por fatores avaliativos. Decorrente deste trabalho verificámos uma melhoria média, 2,36 para 2,37, desta categoria no 2º ano. Um dos fatores que entendemos relevantes para esta melhoria esteve assente num apurado trabalho a pares muito relacionado com a comunicação, encorajando as crianças a partilhar esquemas de resposta ou resultados, o que requereu um trabalho de campo que exigiu tempo e daí mais uma vez termos constatado, e melhor entendido, a importância da inclusão como fator de sucesso na aprendizagem.

Na categoria *Capacidades e Aptidões*, os alunos foram gradualmente adquirindo autonomia e confiança em si próprios num processo de interação com o grande grupo, em experiências matemáticas que incluíram a capacidade de interpretar representações suas ou dos colegas ou estabelecer conexões com outros tópicos de forma analítica e crítica sabendo articular conhecimentos, desenvolvendo representações, e utilizando-as em contextos diferentes, constituindo um importante passo para a generalização. Nesta categoria foi visível uma permanente evolução, desde o primeiro período do 1º ano (1,98) e o final do 2º ano (2,43), sendo de destacar o aumento significativo da média do 1º para o 2º ano (2,17 para 2,31).

Em síntese, comparando as médias resultantes dos dados analisados no 1º e 2º ano, a progressão foi sempre visível à exceção da categoria Conhecimentos.

> "A observação é também um bom meio de avaliar a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos, as suas competências de cálculo, os seus processos de raciocínio e de resolução de problemas, bem como os seus valores e atitudes. Pode proporcionar muita informação relativamente a estes objectivos curriculares. Esta qualidade é também a sua principal limitação, pois torna-se difícil ao professor fazer registos selectivos anotando apenas o que é realmente importante." (Ponte & Serrazina,2000)

Podemos concluir, que entre os resultados apresentados no 1º e no 2º ano de escolaridade a correlação é moderada (0,57). Nas categorias de Comunicação e Capacidades e aptidões verificou-se uma forte correlação (0,74 e 0,75) respetivamente.

Acresce mencionar que em todas as médias apresentadas foram tidos em conta os resultados dos alunos com fatores diferenciadores (8), quatro dos quais com défice cognitivo e portadores de PEIs, com adaptações curriculares. De facto estes quatro alunos participaram na aula de Matemática com muito interesse, sendo as suas estratégias de resolução com frequência expressas em registos icónicos mas que maioritariamente revelavam compreensão e alguns conhecimentos. Ainda assim, três deles apresentaram resultados *Fracos*, dadas as suas características com oscilações ao nível da atenção. Poderemos comprometer o êxito das orientações metodológicas do novo PMEB por estes três alunos com défice cognitivo? Ou, pelo contrário valorizar o trabalho numa ação conjunta pela devolução de aprendizagens, em relações pessoais gratificantes, ainda que em diferentes patamares de realização ou de aquisição de conceitos e procedimentos?

3 O inquérito aos professores experimentadores

Após a *leitura* das respostas dos questionários[22] enviados aos professores experimentadores, seguiu-se ao processamento e tratamento de dados e análise dos mesmos, que permitiu legitimar as hipóteses colocadas.

Na análise dos dados recolhidos, utilizou-se a análise estatística através do software Microsoft Excel, onde se calculou o coeficiente de correlação entre as variáveis subjacentes às orientações metodológicas implementadas pelos professores experimentadores do novo PMEB.

Os dados resultantes dos 100 inquéritos[23] - amostra maior possível conseguida tendo em conta os 400 agrupamentos que aderiram à generalização da experimentação do novo programa, no ano letivo de 2009/2010 - foram analisados tendo em conta as seguintes questões:

- Será que a formação do professor contribui para minorar as dificuldades dos alunos a Matemática?
- Será que o trabalho em sequências de tarefas matemáticas desenvolve a aprendizagem dos alunos e promove a inclusão?
- Será que o trabalho colaborativo em sala de aula, contribui para minorar o insucesso e promover a inclusão?
- Será que a comunicação matemática contribui para melhorar a aprendizagem e promover a inclusão?

[22] Anexo I

[23] Anexo L

operacionalizadas segundo as seguintes Hipóteses:

H01 A frequência no Programa de Formação Contínua de Matemática para Professores do Ensino Básico, está diretamente correlacionada com:

- O nível de resultados dos alunos
- O nível de inclusão dos alunos.

H02 - A preparação de uma sequência de tarefas, está diretamente correlacionada com:

- O nível de resultados dos alunos
- O nível de inclusão dos alunos.

H03 - A frequência de trabalho colaborativo está diretamente correlacionada com:

- O nível de resultados dos alunos
- O nível de inclusão dos alunos.

H04 - A comunicação matemática, em sala de aula está diretamente correlacionada com:

- O nível de resultados dos alunos
- O nível de inclusão dos alunos.

H05 - Regista-se um efeito diferencial positivo nos resultados obtidos pelos alunos de um mesmo professor com e sem aplicação do novo Programa da Matemática

Com esta metodologia de trabalho pretendeu-se dar uma visão objetiva da resultante das respostas da amostra inquirida.

Segundo as respostas apresentadas pelos professores e com o objetivo de responder à primeira questão, associando os anos de formação do professor com as aprendizagens dos alunos no âmbito do novo PMEB pudemos concluir que os professores no final da experimentação do novo programa avaliaram globalmente o resultado dos seus alunos de uma forma tendencialmente crescente, conforme se demonstra no seguinte quadro.

	Zero anos de Formação *(Média)*	Mais de 2 anos de Formação *(Média)*
Conhecimentos	2,21	2,67
Saber fazer	2,11	2,78
Saber Comunicar	2,07	2,56

Tabela 5: Limites do universo referente a *Zero anos de Formação* e *Mais de 2 anos de Formação*

O Programa de Formação Contínua em Matemática para professores (PFCM) entrou em funcionamento no ano letivo 2005/2006, tendo como ponto de partida a reflexão, o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor, baseado na identificação dos fatores de sucesso ou de dificuldade em situações reais de práticas de sala de aula, dando especial enfoque à reflexão como ponto de partida para um maior investimento no conhecimento didático matemático (Martins & Santos, 2011)

Sabemos que a equipa de autores do novo programa aquando da reformulação do mesmo, entregou o programa acompanhado das orientações metodológicas imprescindíveis a um boa implementação, de forma a proporcionarem uma *prática compreensiva de procedimentos* (PMEB, 2007). Segundo Guimarães (2009), uma situação já há muito detetada, é a necessidade de mais e melhor formação, reafirma ainda, *formação com o novo programa mais do que para o programa*, numa perspetiva de apoio e acompanhamento do professor em sala de aula. Também Amaral & Almeida (2010), realçam a importância do encontro entre professores, numa perspetiva de partilha e reflexão, contudo privilegiam os professores que frequentaram o Programa de Formação Contínua para professores, como um espaço rico em partilha de experiências.

Quando analisadas as respostas dos professores inquiridos sobre o trabalho colaborativo como fator de combate ao insucesso escolar e à promoção da inclusão verificamos que as aprendizagens dos conhecimentos e do saber fazer, são tendencialmente equivalentes, quando considerados o trabalho individual e o trabalho a pares. Quando confrontado com o trabalho em pequenos grupos verificamos uma efetiva melhoria nos resultados apresentados, nestes dois indicadores em análise.

No âmbito do trabalho colaborativo, no parâmetro *saber comunicar* existe uma crescente valorização dos resultados, em sentido crescente do individual para pares, evidenciando-se uma demonstração de que o trabalho em pequenos grupos é aquele que melhor combate o insucesso escolar e promove a inclusão.

	Trabalho individual *(Média)*	Trabalho a pares *(Média)*	Trabalho em pequenos grupos *(Média)*
Conhecimentos	2,44	2,42	2,57
Saber fazer	2,40	2,38	2,48
Saber Comunicar	2,24	2,37	2,48

Tabela 6: Análise no âmbito do trabalho colaborativo

Segundo Abrantes (1994) a organização do trabalho dos alunos concretiza orientações emergentes para a aprendizagem da Matemática que não validam uma forma singular mas exige que seja repensada. Ainda segundo o mesmo autor, a ênfase que é atribuída atualmente ao trabalho de grupo revela o propósito de alterar a natureza das atividades na aula de Matemática, dando enfoque à compreensão, à reflexão e à resolução de problemas, ao invés do investimento em tarefas rotineiras e repetitivas.

Contudo, o trabalho de grupo não é um fim em si mesmo. O ideal é conseguir uma forma de organização que permita conciliar ritmos de trabalho e estimular diferentes tipos de atividades de aprendizagem, tais como a exposição, discussão, trabalho prático, consolidação, resolução de problemas e trabalho de investigação (Cockcroft, 1982, *cit. in* Abrantes 1994)

Já não surpreende afirmar, mediante os resultados apresentados, que o trabalho colaborativo gera uma dinâmica onde a construção de relações matemáticas é feita com os outros, ainda que a compreensão da tarefa seja, com alguma frequência, algo intrínseco e individual. De facto, colaborar significa trabalhar em conjunto numa ajuda mútua *genuína* e não se cingindo a uma ajuda aparente, o trabalho de cada um torna-se mais significativo e satisfatório comparativamente se trabalhado individualmente, sem a colaboração dos outros (Erickson, 1989) Cabe ao professor, mediante o conhecimento que tem da turma, proporcionar e/ou orientar um trabalho colaborativo de forma a legitimar resultados e processos numa prática que se pretende, cada vez mais, construtiva do conhecimento matemático.

Na análise das respostas dos professores inquiridos sobre a *Comunicação Matemática* e sua associação à aprendizagem verificámos que 94 % dos inquiridos responderam que a comunicação matemática está associada positivamente (cerca 50%), ou muito positivamente (44 %) à aprendizagem dos alunos. Os restantes 6% entenderam que não está associado, não assumindo qualquer fator de associação negativa. De relevar que nenhum inquirido respondeu negativamente a esta associação.

A comunicação matemática não poderá ser analisada isoladamente, ela está presente em todas as aulas, associada ao trabalho colaborativo e aos momentos de discussão daí resultantes, durante toda a atividade matemática emergente da tarefa trabalhada. Esta capacidade transversal, que o PMEB releva pela importância atribuída no seu desenvolvimento, quer oral, quer em registo, valoriza o papel atento do professor numa mediação que se pretende construtiva. A complementaridade da comunicação oral e escrita é inevitável. A primeira proporciona aos alunos a argumentação e/ou elucidação e a segunda pela transposição do raciocínio para a estratégia, em modelos mentais que ajudam a uma reflexão sobre as ideias discutidas inicialmente (Ponte & Sousa, 2010) Estamos certos que os professores inquiridos valorizam o ambiente de aprendizagem ao assumirem a comunicação matemática como promotora de aprendizagens (94%) sublinhando a dinâmica subjacente a uma prática que naturalmente interpela tudo e todos num mesmo contexto de ensino aprendizagem. Ao professor cabe esta intervenção atenta e crítica, o estimulo ao confronto de opiniões de forma a descortinar significados, momento importante para o professor incentivar o sentido crítico e a argumentação responsabilizando-os nas suas decisões pela validação das suas ideias ou estratégias de resolução. Também ao professor cabe a tarefa de, no contexto de comunicação, ir fornecendo/questionando informações pertinentes que não ditem soluções mas ajudem os alunos a clarificar ideias. Até o erro é ponto de partida para uma nova experiência de aprendizagem num debate sugerido de forma a testar resultados (Tudella, et al., 1988).

Quando analisadas as respostas dos professores inquiridos quanto à relação entre sequência de tarefas matemáticas e aprendizagem dos alunos, verificamos que à medida que os docentes foram assumindo que realizavam trabalhos com base em sequência de tarefas os resultados alcançados melhoravam significativamente variando do limite mínimo (poucas vezes) até o limite máximo (sempre) de acordo com os seguintes valores

	Atividades em sequência de tarefas Poucas vezes *(Média)*	Atividades em sequência de tarefas Sempre *(Média)*
Conhecimentos	2,25	2,77
Saber fazer	2,13	2,85
Saber Comunicar	1,88	2,85

Tabela 7: Relação entre a sequência de tarefas e as categorias a avaliar

Quando questionados globalmente sobre a importância da sequência de tarefas e a sua associação com a aprendizagem dos alunos, verificamos que a maioria dos docentes são unânimes em referir que existe uma relação muito direta (94 %) entre as duas variáveis, pelo que de todo, consideramos este valor significativamente relevante.

Podemos concluir que o professor, com base no conhecimento dos seus alunos, é capaz de empreender um percurso, *uma trajectória hipotética de aprendizagem* (Simon, 1995), que perspetive o pensamento, o trabalho e a aprendizagem dos alunos, numa envolvência cujo potencial reverte a favor do objetivo de aprendizagem selecionado.

Numa *trajectória de aprendizagem* é identificado o objetivo, a *progressão no desenvolvimento*, implícito num *conjunto de tarefas*, que apoia os alunos a caminharem através daquele percurso (Serrazina, Oliveira, 2010, *ci.t in* Baroody et al., 2004). Segundo Gravemeijer, (2004), o *desenho* das tarefas deve ter como pressuposto a progressão de modos de raciocínio matemático.

Relativamente ao *Trabalho Diferenciado* verificamos que a aprendizagem cresce gradualmente de acordo com a frequência com que os docentes a utilizam, não sendo no entanto significativamente evidente esta conclusão, ou seja, quem utiliza o trabalho diferenciado, poucas vezes, moderadamente ou muitas vezes não releva este trabalho como fator diferenciador na aprendizagem. No entanto, existe uma melhoria nos docentes que a utilizam sempre, o que no nosso entendimento decorre de uma experiência continuada nestes métodos, e não pela natureza do trabalho ao nível de resultados.

Nesta análise somos levados à conclusão de que, de facto, o trabalho diferenciado não concorre para uma melhoria da aprendizagem, o que por contraposição nos faz relevar que a inclusão é um fator diferenciador, pela positiva, do PMEB, ou seja o trabalho dos alunos sob as orientações metodológicas do novo PMEB promove a inclusão de todos os alunos em tarefas comuns. Contudo, as atuais orientações curriculares implicam um trabalho mais exigente da parte do professor, pela inovação que imprime ao desenvolvimento do processo ensino – aprendizagem. O trabalho diferenciado ou estratégias de intervenção que levem os alunos a aprender, chamou a atenção desde muito cedo com Polya (1945) que apresentou um programa que consistia na apresentação faseada da resolução de problemas. Começava pela compreensão do problema, elaboração de um plano, pôr em prática o plano e por fim validação da realização. Desde então as investigações proliferaram no sentido de desenvolver o conhecimento do aluno, já que Polya era acusado de não prestar a devida atenção ao papel da metacognição, conceito também conhecido por pensamento alargado, e que define a capacidade do aluno pensar sobre o seu próprio pensamento e sobre o pensamento dos outros, valorizando a autorreflexão como forma de alargar a imaginação. (Vygotsky, 1995)

Numa síntese final foi importante efetuar uma análise global dos resultados apontados pelos professores inquiridos quanto às três grandes categorias presentes na aprendizagem – *Saber Comunicar*, *Saber Fazer* e *Conhecimentos* – registando o efeito diferencial entre o ano letivo anterior à experimentação e o ano letivo em que foi aplicado o novo PMEB.

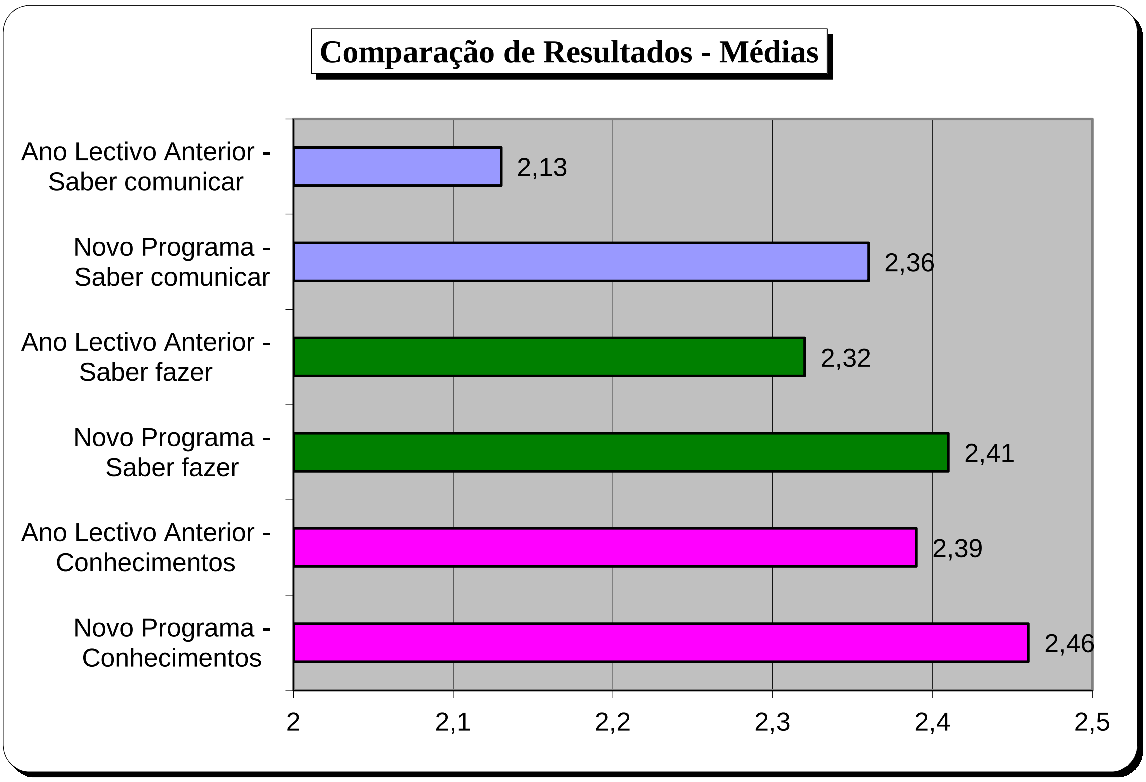


Gráfico 5: Comparação de resultados

Nesta análise fica-nos bem evidente que a aprendizagem dos alunos sob orientação metodológica inerente ao novo programa de matemática é significativamente superior. Assume papel de destaque a Comunicação Matemática que releva a inevitabilidade de alteração de papéis que os alunos e professor assumiram pelo trabalho em tarefas de caráter investigativo ou exploratório. O papel ativo é assumido pelo aluno. A aprendizagem surge como resultado de construção singular, muito própria, mobilizando a argumentação e discussão, o saber e o saber fazer numa atribuição de significado à reflexão do trabalho realizado.

O Saber fazer assume também uma posição favorável após a experimentação do novo programa de Matemática pelo desenvolvimento da capacidade de saber usar processos matemáticos capazes de lidar com problemas ou situações contextualizadas.

A diversidade de propostas de trabalho preconizadas pelo novo PMEB, como a sequência de tarefas, promoveu uma envolvência do aluno em experiências de aprendizagem que estimularam e interpelaram o aluno em desafios comprometedores entre definir estratégias, formular conjeturas, o testar das mesmas e generalizar conclusões. Este ambiente de aprendizagem foi valorizado pela interação entre alunos e alunos / professor, num trabalho que promoveu o conhecimento matemático dos alunos. Este facto foi evidenciado na *leitura* das respostas de cem docentes após a experimentação do novo programa de Matemática ao serem desafiados com questões essenciais, que confrontaram o novo currículo com uma alteração de práticas inerentes às novas orientações metodológicas.

Realçando uma vez mais, o paradigma interpretativo da resposta aberta no inquérito feito aos professores experimentadores do novo PMEB como fonte reflexiva, entendeu-se ser importante considerar as *observações* como mais um fator de análise. Talvez pela questão *"observações"* ter sido colocada com caráter de preenchimento facultativo, somente 25 dos 100 inquiridos, assumiram posições reflexivas, que suportaram uma análise enquadrada no conhecimento das orientações metodológicas do novo PMEB.

Na generalidade, os 25 professores inquiridos[24], numa pluralidade de linhas de pensamento relevaram interesse e envolvimento no PMEB. Verificámos como positivo que, para alguns docentes (28%) o grau de exigência inerente ao novo programa era maior, associado a uma melhoria nos desempenhos, o que de todo não pode ser uma conclusão absoluta porquanto existiram algumas críticas e desconfianças (40%), manifestada por algum sentimento de resistência.

Muito positivo, poder-se-á considerar que os inquiridos enfatizaram, numa resposta por vezes crítica, um maior envolvimento dos alunos na aprendizagem (28%), o que de facto constituiu um dos desígnios do PMEB. Também as capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação – nomeadamente a comunicação matemática foram mencionadas como fator positivo na aprendizagem dos alunos (24%) e como fator de dispersão (4%).

Numa análise cruzada com a questão 9[25], os professores que se manifestaram nas observações com os já referidos 40% de resistência, quando inquiridos sobre a avaliação

---

[24] Anexo M

[25] *Se sim, como avalia o resultado dos seus alunos, no ano lectivo 2009/2010 em relação* a Conhecimentos, Saber fazer e Saber Comunicar

das aprendizagens revelaram uma posição favorável, ou até muito favorável. Contudo, a comunicação matemática é um fator que merece uma reflexão (análise do quadro demonstrativo referente à tabela 8).

	Não satisfaz	Satisfaz	Satisfaz bem
Conhecimentos *Média 2,4*	0%	60%	40%
Saber fazer *Média 2,36*	0%	64%	36%
Saber Comunicar *Média 2,28*	12%	48%	40%

Tabela 8: Respostas dos 25 inquiridos à questão 9 do inquérito

Porém, a sua análise não pode ser isolada, a sua transversalidade reforça o seu envolvimento em qualquer atividade matemática. As propostas emergentes das orientações metodológicas do novo programa de Matemática conduzem a uma nova organização de aula, onde a dinâmica impera pelo apoio ao discurso matemático favorável à compreensão de ideias matemáticas e suas relações (Amaral & Almeida, 2010). Estas orientações implicam novas formas de trabalho do professor, cuja gestão curricular é ainda muito recente. Os desafios ao professor foram acrescidos exponencialmente. A Comunicação matemática foi uma das realidades que modificou a prática habitual com repercussões favoráveis na aprendizagem dos alunos, como já tivemos oportunidades de verificar pelas respostas de todos os inquiridos. Devemos entender estes resultados da análise não como dificuldades, mas como novos desafios que se colocam ao professor de hoje Não nos referimos apenas a uma questão de terminologia mas antes a uma questão de atitude face à inovação (Santos, 2010).

Numa análise à resistência já mencionada verificámos que a mesma estava relacionada com a falta de tempo do professor pelo aumento da burocracia, (4%) a falta de meios e auxiliares, que de todo não nos parecem relevante, pois o PMEB não recorre a materiais didáticos excecionais e de difícil aquisição, a reduzida carga horária (8%) e a impreparação dos alunos. Mais crítico e preocupante foi a recorrência de algumas respostas à ausência de orientações explícitas (8%). Relevada esta realidade, o PMEB traduziu-se, no nosso entendimento num fator de sucesso porquanto, e pese algumas abordagens em sentido contrário[26] num programa em que a resistência não foi de facto

[26] 13 Respostas abertas

um fator dominante, antes, pelo contrário, foi bem aceite pela generalidade dos inquiridos.[27]

A questão da resistência à mudança mesmo contra a evidência é no nosso entendimento, umas das causas principais para a redução do sucesso de qualquer projeto. O problema de estagnar num tempo de referência de alguns, é bastante comum e, no entanto, pouco se tem trabalhado sobre este assunto de crescente relevância nas sociedades contemporâneas. É um assunto que atravessa os domínios da atitude e dos comportamentos, com especial relevância para a Psicologia e a Sociologia, e por isso de difícil intervenção e alta complexidade. Teria sido desejável envolver os agentes educativos com especial enfoque os docentes, em formação num ambiente que proporcionasse aprendizagens matemáticas mais rigorosas e pertinentes para os alunos. (Canavarro, 2010) Ainda segundo a mesma investigadora, só a frequência na formação não é suficiente, entende-se mais relevante a consciencialização da vontade de querer aprender mais e melhorar as práticas.

Estruturalmente um grupo significativo de inquiridos respondeu numa lógica essencialmente curricular, ignorando o potencial pedagógico implícito no modelo de implementação do novo PMEB. Esta será na nossa análise a grande mudança. Os docentes não se podem encerrar numa atitude exclusivamente curricular. A mudança situa-se essencialmente no professor, como promotor da dinâmica e da interação entre aluno-professor-aluno. A generalização da implementação terá que ser interiorizada pelo professor como promotor da construção do conhecimento, num papel mais exigente mas gratificante.

Ficaram-nos no entanto algumas abordagens por categorizar. Não é novidade, sendo mesmo recorrente, que quando algo não corre bem, o ciclo anterior, ou seja o passado do aluno ou até do professor poderá ser um constrangimento. Ou ainda o 1º ciclo como escola primeira, terá de ser ele a dar o primeiro passo para a mudança, a fim de proporcionar nos alunos uma nova forma de estar e trabalhar que impera dar continuidade.

[27] 75 respostas que nada mencionaram e 12 observações favoráveis

Em síntese, os pareceres dos professores inquiridos revelaram uma atitude positiva face ao programa e uma boa recetividade às orientações metodológicas recomendadas pela equipa de autores para uma boa implementação.

As repercussões desta mudança não terão uma visibilidade a curto prazo, mesmo que o empenho dos professores seja claro, pois todo o processo de mudança implica um tempo de produção de efeitos. Persistem e sobrevivem teorias pelo atávico gosto de perpetuarmos o que é conhecido e como tal mais confortável. Estranhamente, a mudança leva-nos ao supremo ato de fé de que alguém tem capacidades que nós não temos ou ainda que o fator sorte é algo acessível apenas aos outros. Esta oposição individual à mudança tem vindo a ser combatida pela experiência, pelo assumir percursos delineados na mudança curricular preconizada pelo PMEB, numa caracterização de papéis que incutem no professor um ator multifacetado. Os professores mostraram que inovar é possível. Também o professor deve

> “(…) contribuir para que as situações educativas propostas sejam vistas e vividas pelos alunos como pertinentes e significativas. Para conseguir que a sua acção profissional tenha eficácia, o professor precisa ainda de ser um *construtor de sentido* “Canário (2011).

Palavras-chave:

Boas expectativas, exigência, alunos participativos, falta de formação, reforço das competências transversais

4 Trabalho com grupo focado

A reflexão é uma das dimensões deste estudo. Assim, problematizaram-se entendimentos e silêncios que descomprometeram intervenientes.

Repensámos o nosso propósito inicial de estudo – o ambiente e o contexto de sala de aula como fator de aprendizagem - e a interpretação de consensualidades na concretização de práticas, face às orientações preconizadas pelo PMEB.

Organizámos um grupo focado, com o número possível de professores, entre as dificuldades de coordenação no âmbito da logística atual e própria de um início de ano letivo. O grupo foi assim formado por nove docentes, seis do 1º ciclo, três do 2º ciclo e 1 do 3º ciclo.

A exposição áudio do grupo (Anexo F) e posteriormente a categorização das diversas exposições (Anexo F.1), deixou claro que o conhecimento das orientações metodológicas subjacentes ao novo PMEB, chegaram através do PFCM, Plano da Matemática I e Plano da Matemática II ou das reuniões mensais com a professora acompanhante, aquando da generalização do programa (47%), de reuniões de departamento de Matemática (12%), e do trabalho colaborativo (23%). Ou seja a divulgação esteve na origem de outrem, não foi mencionada a sua leitura, por uma vontade própria, no Programa que as corporiza em escassas páginas, à exceção da consulta obrigatória nas sessões do PFCM.

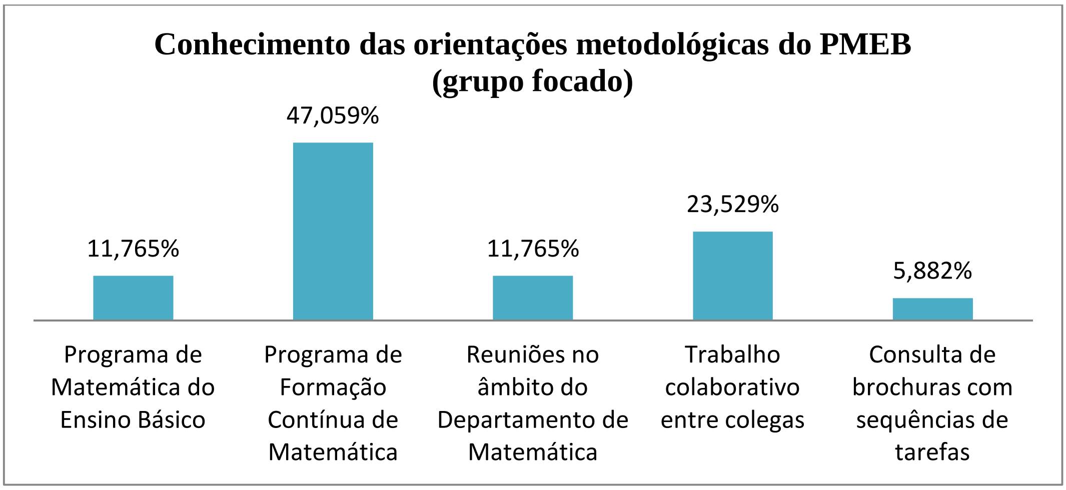


Gráfico 6: Conhecimento das orientações metodológicas do PMEB (grupo focado)

Dois dos docentes não frequentaram o PFCM e um outro com uma participação limitada ao trabalho de um tópico. Para estes docentes o contacto com as orientações estiveram relacionadas com as informações e a partilha de experiências, no âmbito de um trabalho colaborativo e em reuniões de departamento.

Quando o objeto de análise foi a sequência de tarefas, percecionou-se um binómio de relevância em relação às mesmas. No âmbito do grupo de professores que frequentaram o PFCM, foi reconhecida a potencialidade desta prática na aprendizagem e desenvolvimento do aluno (17%), pela valorização da descoberta e do confronto de estratégias, ao nível da comunicação matemática (17%). Contudo não mencionaram outros aspetos positivos como o estabelecer relações presentes na prática, segundo as orientações metodológicas do PMEB. No grupo que não frequentou o PFCM a aplicação de sequências de tarefas era limitada, pelo escasso tempo letivo para o trabalho na disciplina (11%), bem como foi manifesto algum ceticismo na avaliação de aprendizagens (11%), categorizada *na avaliação por definir*.

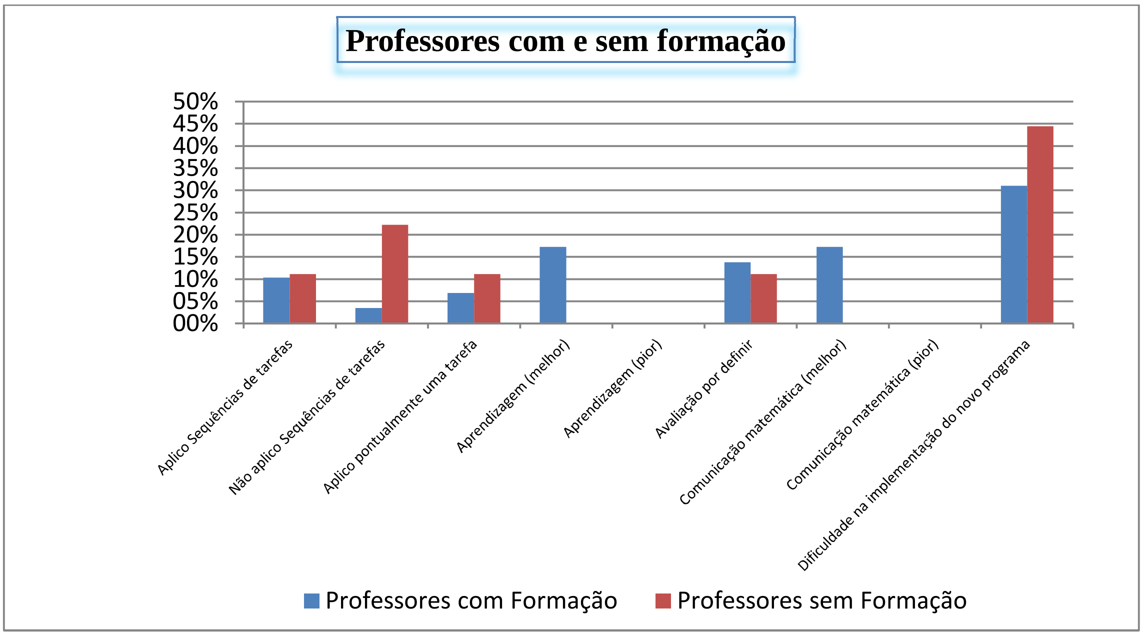


Gráfico 7: Feedback da aplicação do PMEB (professores com e sem formação)

Apontaram como deficiente a capacidade de articular conhecimentos pela implementação no 1º ano e 3º ano do 1º ciclo e nos anos iniciais do 2º e 3º ciclo. Este percurso de implementação alternado foi mencionado como um fator de dificuldade na aplicação de tarefas de investigação, pela descontinuidade de aprendizagens obrigando a um tempo acrescido para inversões nos percursos de aprendizagem pela falta de articulação entre o antigo e novo currículo (16%).

Aludindo de forma elementar à sequência de tarefas, referiram que esta, quando preparada pelo professor, tem subjacentes os conhecimentos prévios dos seus alunos, de forma a conceber um percurso de investigação, em tarefas encadeadas segundo uma determinada ordem que mobilize os conhecimentos na resolução de novas situações. Neste ponto, os professores com formação assumiram não aplicar sequências de tarefas por falta de tempo (4%), aplicam sequências de tarefas (7%), ou tarefas isoladas de forma pontual (7%). O outro grupo apenas (11%) aplica tarefas, de caráter pontual também (11%) e (22%) não aplica tarefas. Este grupo que não frequentou o PFCM não apresentou a sua forma de realização. Os outros docentes assumiram procurar as sequências de tarefas já elaboradas, em brochuras, pela DGIDC. Foi importante essa procura, contudo também o seria se elas fossem adaptadas com base nas especificidades dos contextos de turma.

Foi unânime que as tarefas não eram apresentadas em sequência, pelo tempo de realização que excedia o destinado para a sua execução. Neste tópico foi equacionada a condição dos alunos, quanto ao seu nível de conhecimentos para trabalharem a antecipação de alguns tópicos matemáticos, em simultâneo com a imaturidade dos alunos cada vez mais prolongada no tempo, o excessivo número de alunos por turma, as lacunas verificadas na área de língua portuguesa, nomeadamente ao nível da interpretação e ainda mais pertinente o grupo turma poder ser composto por dois anos de escolaridade no caso do 1º ciclo, (31%) nos professores com formação e (45%) nos professores sem formação. O acréscimo de tempo semanal na área de Matemática, já este ano letivo, foi acolhido como bom propósito.

Em síntese, perspetivaram-se tempos de otimismo para as turmas que trabalharam em diversos tipos de tarefas, em experiencias de aprendizagem, valorizando os momentos da discussão interpelados pelo professor de forma a dar significado aos conceitos trabalhados, desde o 1º ano, de forma a reduzir o tempo na educação de formas de trabalhar, ou em trabalhar, fora de tempo, conceitos necessários para a compreensão das ideias em presença.

Foi também fator de relevo que o novo PMEB potencia o empenho e gosto pela Matemática, a compreensão e a aprendizagem, não só na área de Matemática como também, na área da Língua Portuguesa pela facilidade em comunicar ou expressar formas de pensar. Contudo, a gestão da informação e operacionalização de procedimentos não é efetiva. Contorna-se o desenvolvimento de práticas inovadoras com o ensino expositivo, pelo receio de um percurso curricular inacabado pelo tempo ou pela segurança de práticas instaladas.

Compreendemos que a PFCM esteve à disposição dos professores do 1º e 2º ciclo em torno das orientações metodológicas, anos antes da generalização. A formação do 3º ciclo foi menos abrangente, envolvendo um menor número de professores. Assim foram também disponibilizados professores acompanhantes do Plano da Matemática I e posteriormente do Plano da Matemática II, junto dos coordenadores das escolas agrupadas. Ainda assim, muitos foram os docentes que face à inovação não procuraram as condições que facilitariam este novo período de desenvolvimento curricular.

Porém, é do nosso conhecimento que ser professor encerra hoje um conjunto de valências conforme a condição de trabalho e a responsabilidade do momento. Acresce o trabalho fora da sala de aula para burocracias crescentes, e que em nada valorizam a ação docente. Exige-se ao professor reconfigurações de práticas que deem respostas às necessidades específicas da turma, onde o empenho e a ânsia de também aprender o levam a investir no património associativo dos pares que preenche vazios inocentes ou assumidos pela evidência que o mundo não para e a mudança já há muito se instalou, prometendo maiores amplitudes do significado matemático, isto no entendimento não expresso mas que incorpora uma perceção por todos sentida.

Capítulo V Conclusões e limitações

Perspetivando o presente estudo, recordamos que todo ele foi arquitetado tendo como base uma metodologia qualitativa e quantitativa que, rebatida pela reflexão da prática, do questionário e do grupo focado, comprovaram a hipótese inicialmente formulada:

- O ambiente e o contexto numa sala de aula, a formação de professores e um trabalho colaborativo são contributos capazes de reduzir o insucesso na matemática e promover a inclusão.

O suporte teórico assumiu duas vertentes no ensino da Matemática: atividades exploratórias ou ensino estruturado. Delineou-se um percurso no âmbito das tarefas de investigação pelo papel justificativo de uma aprendizagem inclusiva. Com efeito, o estudo foi balizado pela maior ou menor formação do professor, a quem é reconhecido um importante papel, conhecimento profissional e pedagógico capaz, ou não, de promover momentos ricos de aprendizagem.

Parece-nos imprevidente abordar qualquer conclusão. Conclusão releva-nos para algo que termina, não é o caso. Este estudo não pretende ser mais do que um contributo no âmbito de um empreendimento que começa a revelar o seu potencial, como é o novo PMEB, no sentido de proporcionar uma visão positiva de mais um percurso no desenvolvimento da educação matemática.

Importa relevar a intenção de mudança num tempo futuro que não penhore apenas os anos de experimentação ou de generalização, mas que invista num projeto que já mostrou resultados positivos quer na aprendizagem dos alunos, quer na inclusão dos mesmos. Já percebemos que, com alguma frequência, mudança destina-se a encapotar práticas acomodadas a currículos renovados, mantendo o manual como dispositivo de apoio.

A única certeza que nos assiste garantir é que a trajetória do ensino da matemática está em transformação. A utopia leva-nos ao encontro entre o ideal e o possível, e mais não é do que o estado final a que designamos realidade, mas sem a qual não é possível construir alguns alinhamentos.

O ato educativo tem sido alvo de estudos.

Mas a matriz da mudança encontra sempre a fronteira entre o ideal e o possível, procurando a todo o momento respostas assentes na razoabilidade da envolvente. Trata-se sempre de um processo potencialmente difícil de gerir que implica cedências e processos de transição, muitas vezes consubstanciados em regimes jurídicos formais, que só o tempo se encarrega de por em prática, nomeadamente nas suas dimensões mais relevantes dos comportamentos e das atitudes perante novas realidade educativas.

Com a assunção de que o ideal é impossível, entendemos ter demonstrado que o campo do possível se constrói num sentido progressivo, pela adoção de atividades curriculares inovadoras, com recurso à formação, inicial e contínua, dos professores, com plena convicção de que uma atitude reflexiva sobre práticas, implica inevitavelmente no professor, o abandono do papel monopolizador ao nível da comunicação, contudo exigindo-lhe um olhar atento, sistemático e mediador equacionando o conhecimento relativo às grandes finalidades curriculares, tendo em conta o contexto da turma.

Melhorar a aprendizagem e a inclusão dos alunos depende da capacidade do professor em promover situações que desafiem os alunos no desenvolvimento da proficiência matemática num modelo aberto, descomplexado e sem barreiras, apoiado num esforço coletivo de colaboração.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L.; Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento de Educação Básica.

Ainscow, M. (1999). *Understanding the Development of Inclusive Schools*. London:Falmer Press.

Althusser, L. (1985). Aparelhos ideológicos de Estudo : Nota sobre os Aparelhos Ideológicos de Estado (AIE), 4.ed. Rio de Janeiro: Graaal.

Amaral, H. (2003). *Actividades investigativas na aprendizagem da Matemática no 1º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa)

Amaral, H., Almeida, P., (2010) A Matemática nos primeiros anos – XIII Encontro Nacional. *Educação e Matemática*, 107(2), pp. 42

Aníbal, G., Teodoro, A., (2008) A Educação em tempos de Globalização. Modernização e hibridismo nas políticas educativas em Portugal *In* Teodoro, A. (Coord). *Tempos e Andamentos nas Políticas de Educação*, Brasília, Liber Livro, pp. 105 – 120

Anthony O' Hear, (2006) Filosofia e política Educativa. *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 13 – 41.

Araújo, Luísa (2006) Piagetianos e vigotskianos : mitos pedagógicos e práticas promissoras. *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 55 – 92.

Araújo, L. (2011). O problema do ensino em contexto é que pode ser muito limitativo. *In* Crato, N. (Coord). *Matemática Ensino: Questões e Soluções*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, pp. 63 – 68.

Barata, F., Melro, J,, César, M. (2001). Quando aprender significa pensar: Práticas inclusivas na aula de Introdução à Filosofia. Actas do VI congresso Galaico- Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho, (vol. Ii) pp.105 -117.

Baruk, S. (1996). *Insucesso e Matemáticas*, Lisboa, Relógio D'Água Editores.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G., & Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. *In* H. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline mathematics education: Proceedings of the 2nd TIME Conference*. Antwerp: University of Antewerp, pp. 174 – 188.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, "*et alii*" (Eds.); *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer, pp. 133 – 146.

Bishop,A, e Goffree,F. (1986). Classroom organisation and dynamics. Em B.Christiansen, A. G.Howson e M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education. Dordrecht: Reidel.

Boavida, A., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a pratica profissional*. Lisboa: APM, pp. 43 – 55.

Borges, M. C., César, M. (2001). Experimentar Interagindo: Processos inovadores de apropriação de conhecimentos em Ciências. Actas do VI Congresso Galaico- Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho, (vol. II) pp. 323-336.

Bransford, J. D., Brown, A., Coking, R. (2000). *How People Learn: Bain, Mind, Experience and School*. Washington, D. C. National Academy Press.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (3), pp.125 – 153.

Brocardo, J, (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano.* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa)
Brown, M. (1993). Assessment in Mathematics Education: Development in Philosophy and Practice in the United Kingdom. *In Cases of Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study* Kluwer, pp.71-84.
Brownell, C. & Carriger,M. (1993). Collaborations among toddler peers: Individual contribuitions to social contexts. *In* L. Resnik, J., Levine e S. Teasley (Eds), *Perspectives on socially shared cognition*. Washington: American Psychology Association, pp. 635-383.
Buescu, J. (2006) Matemática à entrada para a Universidade: que deficiências? *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 121 – 130.
Butterworth, B. (1999), *What Counts: How Every Brain is Hardwired for Math*. Nova Iorque, The Free Press.
Cachapuz, A. F. (2009) O Processo de Bolonha e a Formação de Professores: dilemas, realidades e perspectivas. *Revista Brasileira de Formação de Professores*. 1(2), pp.1
Caldas, A. C. (2006) Os processos neurobiológicos subjacentes ao conhecimento da matemática. *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 179 – 190.
Canário, R. (1991) *PROFMAT 90*, Lisboa, APM
Canário, R. (2011). Ser professor hoje. *Educação e Matemática*, 114 (5),pp.1
Canavarro, A. P. (2003) Práticas de ensino de matemática: duas professoras, dois currículos. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa)
Canavarro, A, Santos, L. Ponte, J. (2000) O currículo na prática lectiva: dois estudos de caso. *Projecto DIF – Didáctica e Formação.* Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, pp.133-144.
Canavarro, A. (2010) Formação precisa-se: Um investimento continuado por parte de todos. *Educação e Matemática*, 108 (3), p.1
César, M.(1994). O papel da interacçaõ entre pares na resolução de tarefas matemáticas - trabalho em díade vs trabalho individual em contexto escolar. Lisboa: DEFCUL [tese de doutoramento – documento policopiado].
César, M.(1998). Y se aprende contigo? *Interacciones entre parejas en la aula de matemáticas.* Uno, 16, pp.11 – 23.
César, M. (2000). Interacções Sociais e Matemática: Ventos de mudança nas práticas de sala de aula: *In* C. Monteiro *"et alii"*. (Eds), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu:SPCE – Secção de Educação Matemática, pp.47-83.
César, M. (2002). E depois do adeus?: Reflexões a propósito de um *follow up* de duas turmas de um currículo em alternativa. *In* D. Moreira e tal. (Eds), Matemática e Comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática. Lisboa: SEM/SPCE $ IIIE, pp.93-104.
César, M.; Oliveira, I. (2000). Giving voices to the echoes: Inovative Dynamics of knowledge production at school. *Actas da III Conference for Sociocultural Research*. São Paulo:UNICAMP[suporte Cd-Room]
César, M., Perret- Clermont, A. –N., Benavente, A. (2000). Modalités de travail en dyades et conduites à dês taches d'algébre chez dês álèves portugais. *Revue Suisse dês Sciences de l'Education* [Thema: L'apprentissage par le dialogue], 22(3), pp.443-466.
Christiansen, H., Goulet, L., Krentz, C., & Maeers, M. (1997). Making the connections. *In* H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationship: Collaboration and educational reform*. New York, NY: SONY Press, pp. 238 – 290.

Cristiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. *In* B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds), *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht:Reidel, pp. 309-365.
César, M. (2000). Interacções Sociais e Matemática: Ventos de mudança nas práticas de sala de aula: *In* C. Monteiro *"et alii"*. (Eds), *Interacções na aula de Matemática*. Viseu:SPCE – Secção de Educação Matemática, pp.47-83.
Clement, M., & Vandenberghe, R. (2000). Teachers' professional development: A solitary or collegial (ad)venture? *Teaching and Teacher Education*, (16), pp.81 – 101.
Cobb, P.(1987). Information-processing psycology and mathematics education _ a constructivist perspective". *The journal of Mathematical Behavior* 6 (1), pp.4-40.
Cobb, P. (1998). Modeling, *Symbolizing, and Tool Use in Statiscal Data Analysis. Rough Draft May 13*. VanderBilt University.
Confrey,, J. (1995). Student Voice in Examining 'Splitting' as na Approach to Ratio, Propotions and Fractions. Conferência do PME-19. Recife, pp.3-29.
Correia, H.; Céasr, M. (2001). Aprender a Interagir/ Interagir para Aprender. *Actas do VI Congresso Galaico-Português de Psicopedagogia*. Braga: Universidade do Minho, (vol. II) pp. 119-128.
Crato, N. (2011). *O "Eduquês" em discurso directo*. Lisboa, Gradiva
Crato, N. (2011). Ensinar Matemática temperando a experiencia com as recomendações da ciência moderna. *In* Crato, N. (Coord). *Matemática Ensino: Questões e Soluções*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, pp. 241 – 264
Cruz, V., Fonseca, V.(2002) *Educação cognitiva e Aprendizagem.* Porto. Porto Editora
Fonseca, V.(2007). *Aprender a Aprender.* Ancora Editora
David Justino, Sobre Filosofia e política educativa (comentário). (2006) *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 43 – 54.
Domingos, A. (2010) Encontro de Investigação em Educação Matemática 2010, *Educação e Matemática*, 108, p.29-30
Dillenbourg, P., *"et alii"*.(1996). The evolution of research on collaborative learning. Em P. Reimann e H. Spada (Eds), *Learning in humans and machines: Towards an interdisciplinarity learning science*. Universitat Freiburg – Psichologisches Institut, pp. 67-90.
Editora, Dicionários (s.d.). J. Almeida Costa, A. Sampaio e Melo. Dicionário da Língua Portuguesa. Porto. (6ª ed.)
Edwards, C., Gandini, L., & Forman, G., (1993). *The Hundred Languages of children: The Reggio Emília Approach to Early Childhood Education.* Norwood, N.J., Ablex Publishing Corp.
Eckert, P. (1993). The School as a Community of Engaged Leraners. (inédito)
Fernandes, E. (1998). *A aprendizagem da Matemática escolar num contexto de trabalho cooperativo*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
Ferreira, Ana C. (2006) Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras (Tese de Doutoramento), FE/UNICAMP
Ferreira, L., & Lima, P. (2006) Portugal: educação em números – uma perspectiva internacional. (2006) *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 93 – 120.
Ferri, R. (2010) Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática, *Educação e Matemática*, 110 (5), pp.19 – 22
Festas, M.I.F. (2011). Contrariamente a certas teses construtivistas, a aprendizagem depende em grande parte da aquisição de factos e procedimentos. *In* Crato, N. (Coord).

Matemática Ensino: Questões e Soluções. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, pp. 153 – 159.

Fiolhais, Carlos (2003) Sobre a Educação em Portugal. (2006) Filosofia e política Educativa. *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 131 – 134.

Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação,Campinas.[Em linha]. Disponivel em <http://www.facec.edu.br/seer/index.php/formacaodeprofessores/article/view/101>. Semestral. [Consultado em].

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heineman.

Foucault, M. (1996). *El yo minimalista y otras conversaciones*: Entrevistas selecionadas por Kaminsky. Buenos Aires: Biblioteca de la Miranda.

Freire, P. (1999). Pedagofia da esperança. Um reencontro com a pedagogia do oprimido. Rio de Janeiro:Paz e Terra.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Gardner, H. (1992). Assessment in Context: The Alternative to Standardized Testing. Em *Changing Assessments. Alternative Views of Apitude, Achievement and Instruction.* Kluwer, pp.77-119.

Giménez, J., Santos, L., & Ponte, J.P. (2004). *La actividad matemática en la aula: Homenaje a Paulo Abrantes*. Bascelona: graó.

Godino, J., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12(1), pp.70 – 92

Guimarães, H. M. (2009) O novo Programa de Matemática para o Ensino Básico. *Quadrante*, 4 (3), pp. 3-7.

Hargreaves, A. (1998). *Os professors em tempos de mudança: O trabalho e a cultura dos professors na idade pós-moderna*. Lisboa: McGraw-Hill.

Hargreaves, A., & Fullan, M. (1992). Introduction. In A. Hargreaves & M. Fullan (Eds.), *Understanding teacher development*. New York, NY: Teachers College Press, pp. 1 – 19.

Hatano, G. & Inagaki, K. (1993). Sharing (1993). Sharing cognition through collective comprehension activity. Em L. Resnik, J. Levine e S. Teasley (Eds), *Perspectives on socially shared cognition* (p. 331-348). Washington: American Psycology Association.

Hoyles, C. (1992). Computer-based microworlds: A radical vision or a Trojan mouse? Em D. Robitaille, D. Wheeler e C. Kieran (Eds), Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education. Montreal (Canadá), pp171-182.

Krainer, K. (2001). Teachers' growth is more than the growth of individual teachers: The case of Gisela. *In* F. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education.* Dordrecht: Kluwer, pp. 271 – 293.

Larson, M. (1988). El poder de los expertos; Ciencia y educácion de masas como fundamentos de una ideologia. *Revista educación*, 285, pp.151-189.

Lave (1988). *Cognition in pratice:: Mind, mathematics and culture in everydat life*. Cambridge: Cambridge University Presss.

Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. *In* P. Light e G. Butterworth (Eds.), Context and cognition: Ways of lerning and knowing. Hempstead: Harvest Wheatsheaf.

Little, J. (1990). The persistence of privacy: Autonomy and iniciative in teachers' professional relations. *Teachers College Record*, 91(4), pp.509 – 536.

Littleton, K., Häkkinen, P. (1999). Learning together: understanding the processes of computer-based collaborative learning. *In* Pierre Dillenbourg (Ed.). Collaborative Learning, Cognitive and Computational Approaches. Pergamon: Oxford, pp.20-30.
Liberman, A. (1994). Teacher development: Commitment and challenge. *In* P. Grimmett & J. Neufeld (Eds.), *Teacher development and the struggle for authenticity: Professional growth and restructuring in the context of change*. New York, NY: Teachers College Press, pp. 15 – 30p.
Loureiro, C. (2008) Planificação: Um ponto na agenda de investigação em Portugal *In* Brocardo, J., Serrazina, L., Rocha, I.(Orgs) *O Sentido do Número reflexões que entrecruzam a teoria e prática.* Lisboa, Escolar Editora, pp.29-33.
Loureiro, C. (2010) Literacia Matemática – Uma procura de contributos para formar cidadãos mais críticos e intervenientes, *Educação e Matemática*, 108 (3), pp.48
McIntosh, A., Reys, B. J. Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), pp.2-8 e pp.44.
Meira,L. (1996). Students'early algebraic activity: Sense making and the production of meanings in mathematics. Em L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), Procedings of the 20th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education. Valência: universidade de Valência, (Vol. 3), pp.377-384.
Mialaret, Gaston, (1981) Être professeur. Analyse historique et conceptuelle. *In Revista da Universidade de Aveiro*, Série Ciências da Educação, Ano 2,(1 e 2), pp. 49.
Menezes, L. (1996). A importância da pergunta do professor na aula de Matemática. *In* J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Eds.) *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Que formação?* Lisboa: SPCE, pp. 105 – 116.
Menezes, L., Ponte, J.P. (2006) Da reflexão à investigação: percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1º ciclo na área de Matemática. *Quadrante*, (1e 2), pp. 3 – 32.
Minsky,M. (1986). The society of mind (2ªed.). Nova Iorque: Simon And Schuster.
Morais, J. (2006) As relações entre a aprendizagem da leitura e a aprendizagem da matemática. (2006) *In* Crato, N. (Coord). *Desastre sobre o Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, Lisboa, Gradiva, pp. 155 – 178.
NCTM (1991). *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar.* Lisboa, APM
NCTM (2007) *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa, APM
OCDE (2004), *Education at a Glance – OECD Indicators 2004*.
OCDE (*Organização para a Cooperação e desenvolvimento Económico*) Paris.[Em linha] Disponível em <http:// www.oecd.org > [Consultado em 21/11/2010].
Oliveira, L. (1997). A acção-investigação e o desenvolvimento profissional dos professores: Um estudo no âmbito da formação continuada. *In* I. Sá-Chaves (Ed) Percurso de formação e desenvolvimento profissional. Porto: Porto Editora, pp.91-106.
Oliveira, F. (2011). A intuição tem de ser verificada pelo rigor. *In* Crato, N. (Coord). *Matemática Ensino: Questões e Soluções*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, pp. 57 – 62.
Panitz, T. (1996). *A definition of collaborative vs cooperative learning*. Disponivel em: <http: //www. Lgu.ac.uk/deliberation/collab. Learning/panitz2.html>. [Consultado em 2 Novembro de 2010].
Palhares, P. (2004) *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa, Lidel

Panitz, T. (1996). *A definition of collaborative vs cooperative learning*. Disponivel em: <http: //www. Lgu.ac.uk/deliberation/collab. Learning/panitz2.html>. > [Consultado em 11 de Novembro de 2010]

Piaget, J. (1975). *L'équlibration des structures cognitives*. Paris, Press Universitaires de France

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-stones. *In* H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM, pp. 7 – 29.

PISA (*Programme of International Student Assessment*). [Em linha] Disponível em <http:// www.pisa.oecd.org > [Consultado em 17/11/2010].

PISA (Programme of International Student Assessment) 2000, 2003, 2006 e 2009. *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática*. Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Lisboa [Em linha] Disponível em <http:// www.gave.min-edu.pt > [Consultado em 29/04/2011, 01/05/2011].

Perret-Clermont, A. N., Perret F. e Bell, N.(1991). The social construction of meaning and cognitive activity in elementary school children. *In* L. Resnik, J. Levine e S. Teasley (Eds), *Perspectives on socially shared cognition*. Washington: American Psycology Association, pp. 41-66.

Ponte, J.P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7 (1), pp.3-33.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. *In* APM (Ed.), *Actas do ProfMat 98*. Lisboa: APM, pp. 27 – 44.

Ponte, J.P. e Serrazina, M.L.(2000) Didáctica da Matemática do 1º ciclo, Universidade Aberta, Lisboa.

Ponte, J. P(2002). Investigar a nossa própria prática. *In* GTI (Eds.), Reflectir *e investiogar sobre a prática profissional*. Lisboa, APM, pp. 5-28.

Ponte, João P. (2003), O ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? *In* CNE (Ed.), *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*. Lisboa, Conselho Nacional de Educação

Ponte, J. P., *"et alii"*. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. *In* P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (orgs), *Investigações matemáticas na aula e no currículo,* Lisboa, Projecto MPT e APM.

Ponte, J,P.(2008) Melhorar a aprendizagem da Matemática: Uma preocupação do passado e do presente *In* Canavarro A. P. (Org) 20 Anos de temas na EeM, Lisboa, APM pp 3-13.

Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010) *Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico*. Lisboa, APM

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery* (edição original de 1962/1965). New York:Wiley

Programa de Matemática do Ensino Básico, (2007), ME, DGIDC

Ramalho, G. (1994) *As nossas crianças e a matemática*. Lisboa, DEPGEF do Ministério da Educação.

Reynolds, A. & Wheatley, G. (1996). How do social interactions contribute to learning? *In* H. Mansfield, Pateman, N. e N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children – International perspectives on curriculum*. Harvard: Harvard University Press, pp. 186-197.

Resnick, B.& Resnick, D. P. (1992). Assessing the Thinking Curriculum: New tools for Educational Reform. *In Changing Assessments. Alternative Views of Apitude, Achievement and Instruction*. Kluwer, pp.37-75.

Resnick, L. (1993). Shared cognition: Thinking as social pratice. Em L. Resnik, J, Levine e S. Teasley (Eds), *Perspectives on socially shared cognition*. Washington: American Psycologiy Association, pp. 1-22.

Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação,Campinas.[Em linha]. Disponivel em <http://www.facec.edu.br/seer/index.php/formacaodeprofessores/article/view/101>. Semestral. [Consultado em 18 /10/2011].

Rocha, I.(2011). Uma boa notícia. Educação e Matemática. Educação e Matemática, 111(1) pp. 15

Rodrigues, D. (2002). "A educação e a diferença". *In* Rodrigues, D. (org.), *Educação e Diferença: Valores e práticas para uma educação inclusiva*. Porto: Porto Editora

Rogoff , B.(1984). Introduction: Thinking and learning in social context. Em B. Rogoff e J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Its development in social context*. Harvard: Harvard University Press, pp. 1-8.

Roldão, M.C."*et alii*" (2009) O conhecimento profissional dos professores – especificidades, construção e uso. [Em linha]. Disponivel em< htttp://hdl. handle. Net/10400 . 19/ 522 > [Consultado em 14/10/2011].

Rosário, P. (2011). O que faz com que um aluno sinta gosto é o prazer de conseguir. *In* Crato, N. (Coord). *Matemática Ensino: Questões e Soluções*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, pp. 69 – 74

Santos, L. (2010). Dificuldades ou desafios? *Educação e Matemática*, 109,p p.1

Serrazina, L. Oliveira, I,.(2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão (2010), *In* GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Coord). O professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico, APM, pp 43 – 56.

Sierspinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. *In* H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM, pp. 30 – 62.

Simon, M. A. (1995). Constructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, p 114 – 145.

Silva, J. S. (1964). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, 1º vol – 6º ano. Lisboa:MNE

Sprintthall, R. C., Sprinthall, N. A., Oja, S. N.(1998). *Educational psychology: a developmental approach*. Seventh Edition. United States of America, McGrawHill.

Stewart, H. (1997). Metaphors of interrelatedness: Principles of collaboration. *In* H. Christiansen, *"et alii"*. (Eds), Recreating relationships: Collaboration and educational reform. New York, NY: SONY Press, pp. 27-53.

Skilbeck, M. (1992) *A Reforma dos Programas Escolares*, Ed. Asa, Rio Tinto.

Skrtic, T.(1995). "Disability and Democracy – Reconstruction, (special) Education for Postmodernity". *The teachers's College Press*. New York: Columbia University

Sparks, D., & Loucks-Horsley, S. (1990). Models of staff development. *In* W. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education*. New York, NY: MacMillan, pp.243 – 250).

Steinbring, H., Bussi, M., & Sierpinska, A. (1998). Epilogue. In H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM, pp. 341 – 346.

Spritnthall, R. C., Spritnthall, N. A., Oja, S. N. (1998). *Educational psychology: a development approach*. Seventh Edition. United States of America: McGrawHill.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A modelo f Goal and theory description in Mathematics education: The wiskobas Project*. Dordrecht, Reidel.

Vale, I., Pimentel, T., Resolução de problemas. (2004) *In* Palhares, P. (Coord). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, Lisboa, Lidel, pp. 7 – 49.
Viana, J. P. (2011). A tónica do rigor deve ser posta primeiramente nos conceitos. *In* Crato, N. (Coord). *Matemática Ensino: Questões e Soluções*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, pp. 75 – 81.
Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), pp.69 – 118.
Voight, J (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 275-298.
Von Glasersfeld, E. (1992). Environment and Communication. *In* Steffe L.P., Wood,T. *Transforming Children's Mathematical Education – International Perspectives*. Hilldale NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
Vygotsky, L. S. (1962). Thought and language. Cambridge MA: MIT Press.
Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamento e Linguagem*. Lisboa, Relógio D'Água Editores.
Vygotsky, L. S. (1978). Mind and Society: the development of higher psychological perocesses. Cambridge MA: Harvard University Press.
Vygotsky, L. S. (1981). The génesis of higher mental functions. *In* J. V. Wertsch (ed), The concept of activity in soviet psychology. Armonk: Scharpe, pp. 144-188.
Vygotsky, L. S. (1985). Le problème de L'enseignement et du développementment à l'âge scolaire. *In* B Schneuwly & J.P: Bronckart (Eds), Vygotsky ayjoutd'hui. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, pp. 59-117.
Vygotsky, L. (1995). *Pensamento e Linguagem*. São Paulo. Martins Fontes Editora
Wertsch J.(1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge: Harvard University Press
Wertsch J.(1993). A sociocultural aooroach to socially shared cognition. *In* Levine e S. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition*. Washington: American Psychological Association, pp. 85-100.
Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing. *In* H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM, pp. 167 – 178.

ANEXOS

Apresentam-se apenas impressos os anexos que garantiam legibilidade. Os restantes encontram-se em suporte digital (CD-ROM anexo da tese)

Anexo A - Caraterização da turma (estudo de caso)

Os critérios de análise encontram-se disponíveis no CD-ROM.

Anexo B - Quadro operacional (CD-ROM)

Anexo C - Sequencia de tarefas

Anexo D - Relatos de aula

D.1 Esquema de análise de relatos de aula (CD-ROM)

Anexo E - Grelhas de progressão (1º e 2º ano de escolaridade) (CD-ROM)

Anexo F - Grupo focado (voz) (CD-ROM)

F.1 Esquema de análise do grupo focado (CD-ROM)

Anexo G - Inquéritos (inicialmente apresentados, 17) (CD-ROM)

Anexo H - Validação dos inquéritos (CD-ROM)

Anexo I - Inquéritos (CD-ROM)

Anexo J - Base de dados (desvio padrão) (CD-ROM)

Anexo L - Base de dados (totalidade dos inquéritos) (CD-ROM)

L.1 Resumo das respostas (inquérito) (CD-ROM)

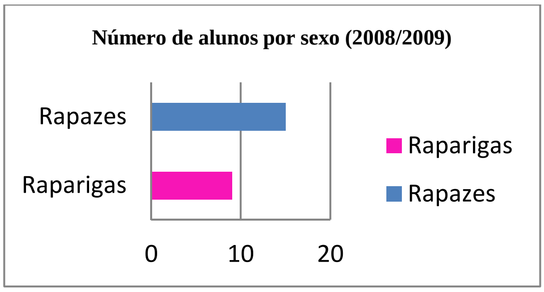
Anexo M - Análise quantitativa das respostas abertas (inquérito) (CD-ROM)

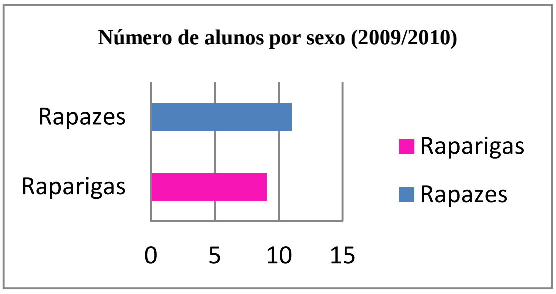
Anexo N – Autorização solicitada aos Encarregados de Educação para a publicação de fotografias, dos seus educandos, durante o trabalho em tarefas matemáticas (CD-ROM).

Anexo A - Caraterização da turma (estudo de caso)

Caraterização da turma (2008/2009 e 2009/2010)

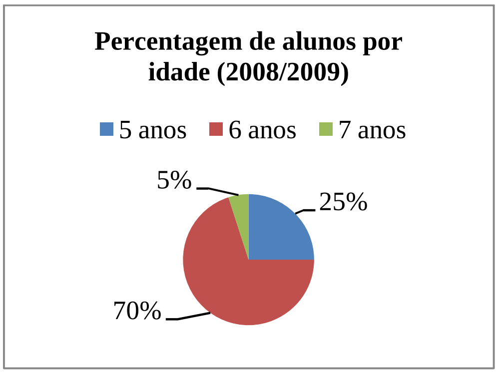
Turma inicialmente constituída por vinte e quatro alunos, sendo quinze do sexo masculino e nove do sexo feminino.

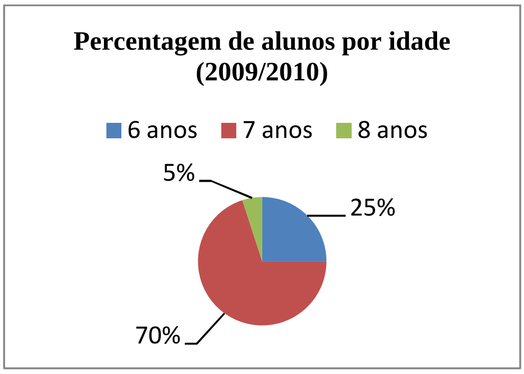




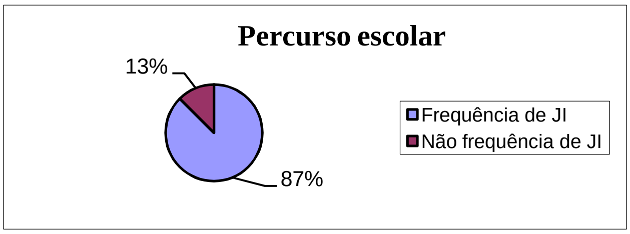
Em 2009/2010, a turma passou a ser constituída por 20 alunos, por decisão do Conselho Diretivo, decorrente do perfil global da turma. No grupo mantiveram-se 11 rapazes e 9 raparigas, com idades compreendidas entre os 6 e os 8 anos.

A idade dos alunos varia entre os cinco e os sete anos.



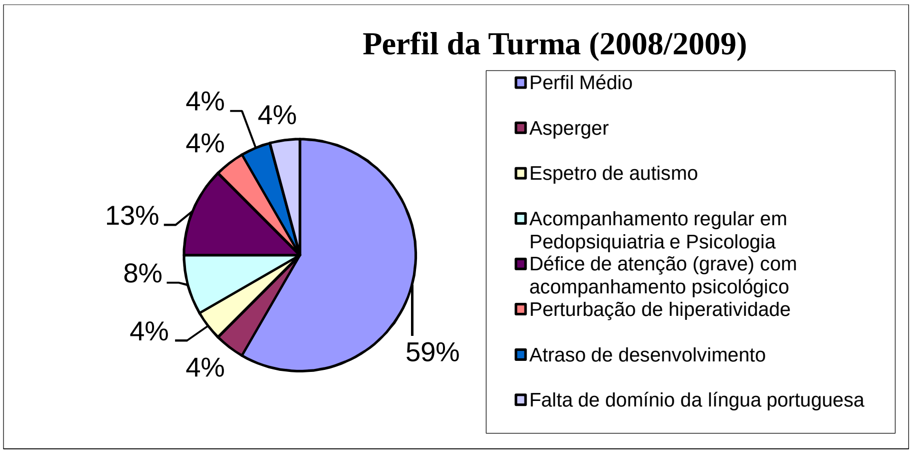


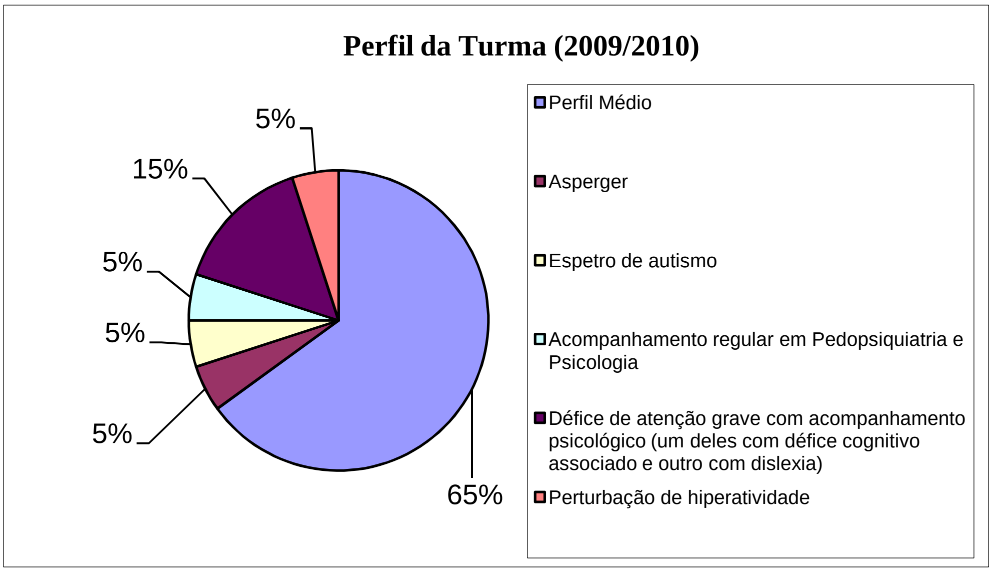
Relativamente ao **percurso escolar** dos alunos desta turma, três não frequentaram o ensino pré-escolar e um dos alunos frequenta, pelo segundo ano consecutivo, os conteúdos programáticos referentes ao primeiro ano de escolaridade. Os restantes vinte alunos frequentaram diferentes jardins de infância (JI) da região, ainda que alguns destes alunos apenas apresentem a frequência relativa ao ano letivo anterior à entrada no primeiro ciclo (2007/2008).



Perfil dos alunos (2008/2009)

	Nº de Alunos
Perfil Médio	14
Asperger	1
Espetro de autismo	1
Acompanhamento regular em Pedopsiquiatria e Psicologia	2
Défice de atenção (grave) com acompanhamento psicológico	3
Perturbação de hiperatividade	1
Atraso de desenvolvimento	1
Falta de domínio da língua portuguesa	1



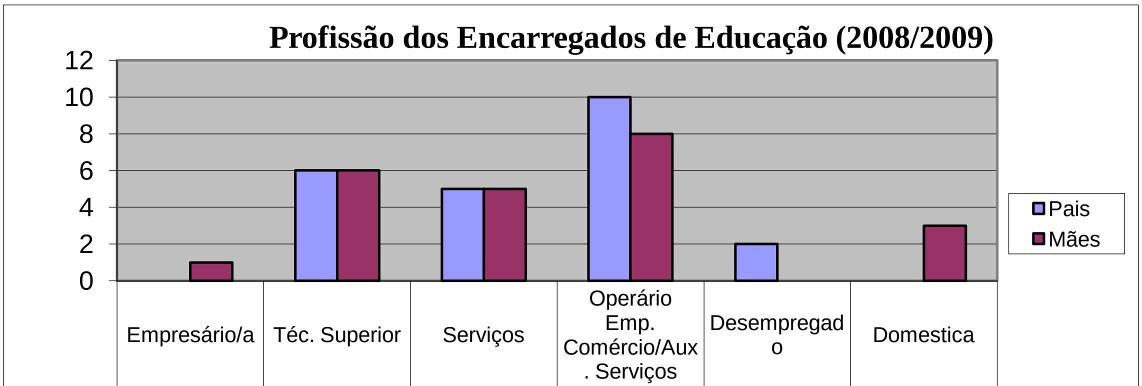


Perfil dos alunos (2009/2010)

	Nº de Alunos
Perfil Médio	13
Asperger	1
Espetro de autismo	1
Acompanhamento regular em Pedopsiquiatria e Psicologia	1
Défice de atenção grave com acompanhamento psicológico (um deles com défice cognitivo associado e outro com dislexia)	3
Perturbação de hiperatividade	1

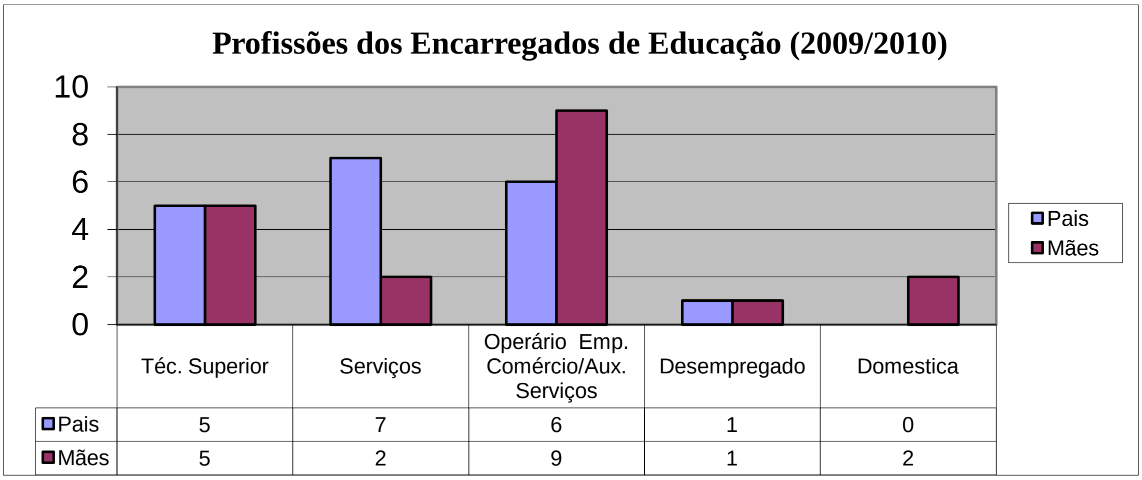
Nível sócio cultural

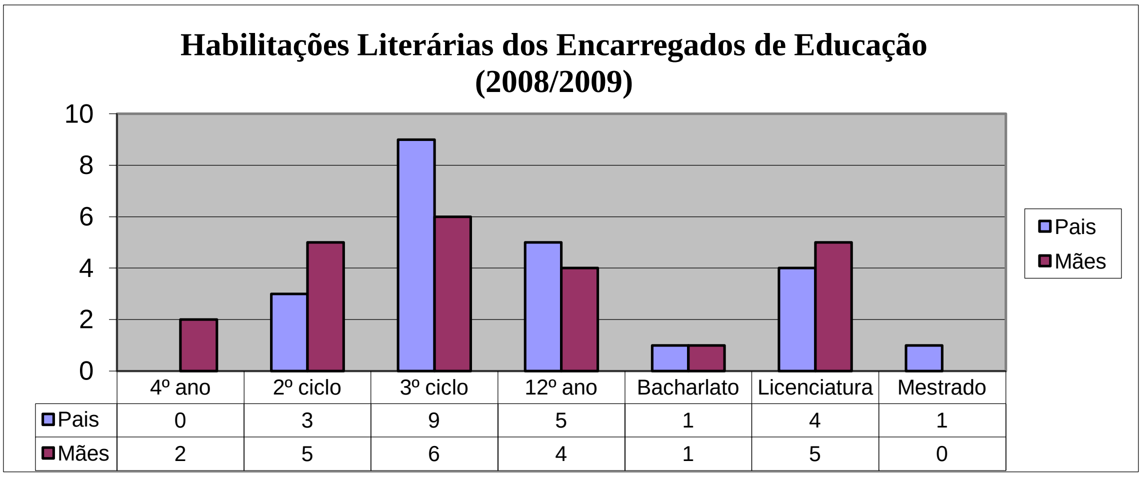
No que diz respeito ao nível sócio cultural dos alunos, a turma é maioritariamente proveniente de um meio socioeconómico médio e médio baixo, tendo em conta os dados das fichas individuais dos alunos apresentados nas tabelas seguintes:

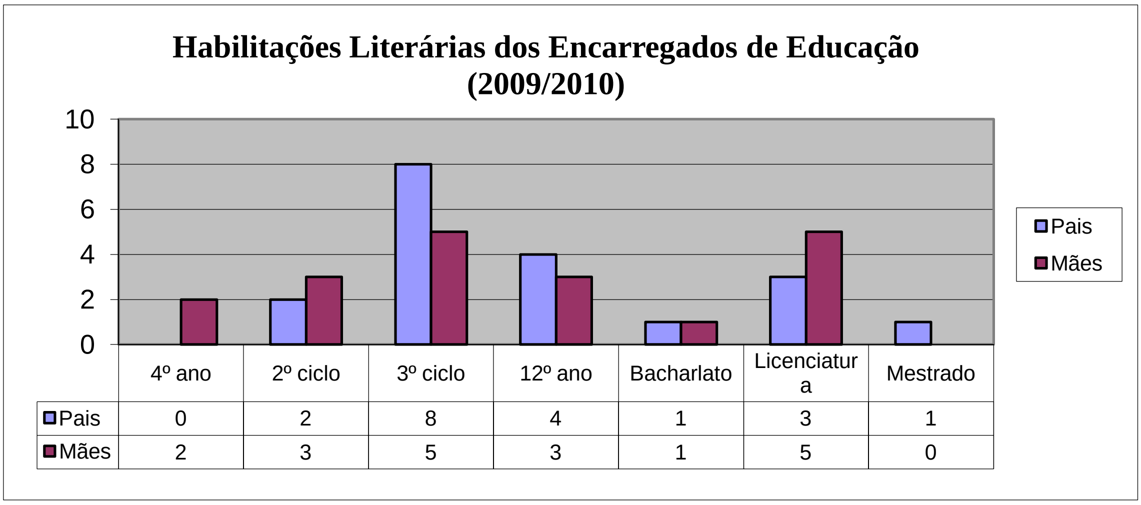


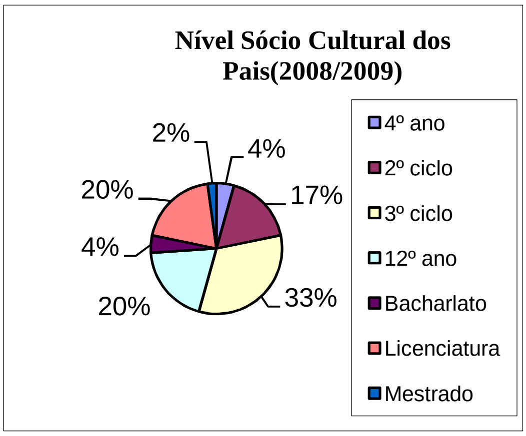
	Empresário/a	Téc. Superior	Serviços	Operário Emp. Comércio/Aux . Serviços	Desempregad o	Domestica
Pais	0	6	5	10	2	0
Mães	1	6	5	8	0	3

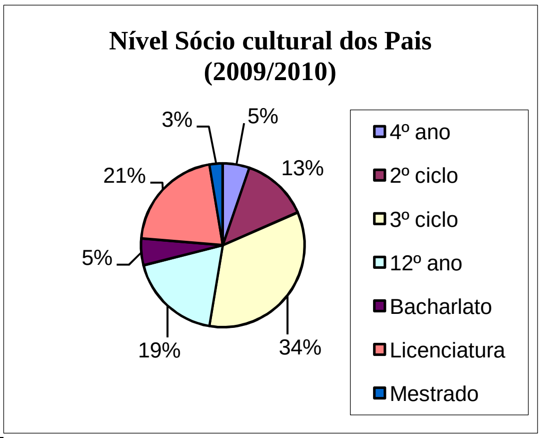
O nível sócio cultural dos alunos da turma mantém-se, em 2009/2010, maioritariamente médio – baixo, prevalecendo uma fasquia de nível socioeconómico médio, tendo em conta os seguintes dados:









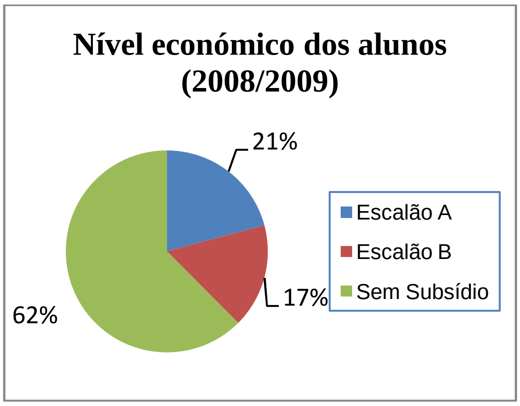


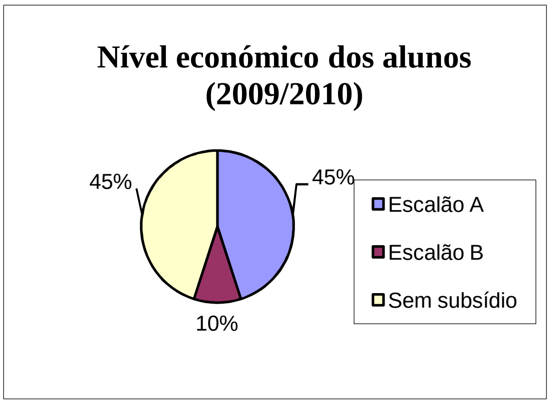
Em 2008/2009 nove dos alunos da turma foram contemplados com subsídio escolar mencionados na tabela seguinte:

Alunos	Escalão A	Escalão B
Nº 1	X	
Disfunções sócio afetivas	X	
Falta dom. Língua Portuguesa		X
Perturbação de hiperatividade	X	
Nº 9		X
Acompanhamento Pedopsiquiátrico		X
Espetro de autismo		X
Défice Atenção dislexia	X	
Défice Atenção Cognitiva	X	

Onze dos alunos da turma, no ano 2009/2010 beneficiaram de subsídio escolar mencionados na tabela seguinte:

Alunos	Escalão A	Escalão B
Nº 1	X	
Nº 4	X	
Perturbação de hiperatividade	X	
Nº 8	X	
Nº 9		X
Acompanhamento regular em Pedopsiquiatria e Psicologia		X
Défice de atenção grave com acompanhamento psicológico	X	
Espetro de autismo	X	
Défice de atenção grave com acompanhamento psicológico e dislexia	X	
Défice de atenção grave com acompanhamento psicológico com défice cognitivo associado.	X	
Nº 20	X	


Nível económico dos alunos (2008/2009)
21%
17%
62%
Escalão A
Escalão B
Sem Subsídio


Nível económico dos alunos (2009/2010)
45%
45%
10%
Escalão A
Escalão B
Sem subsídio

Anexo B – Quadro operacional

(Documento inserido em formato digital (CD-ROM)

Anexo C - Sequencia de tarefas

Ano letivo: 2009/20010

Ano: 2º ano **1º Período** **Data:** 08/03/2010 a 31/03/2010

Tema

Números e operações

Objetivos Gerais do Ensino da Matemática

- Os alunos devem desenvolver uma *compreensão* da Matemática
- Os alunos devem ser capazes de *resolver problemas*
- Os alunos devem ser capazes de *fazer* Matemática de modo autónomo

Propósito principal de ensino

Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos.

Objetivos gerais de aprendizagem / tema

Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:
- compreender e ser capazes de usar propriedades dos números naturais;
- compreender as operações e ser capazes de operar com números naturais;
- ser capazes de apreciar ordens de grandeza de números e compreender o efeito das operações;
- ser capazes de estimar e de avaliar a razoabilidade dos resultados;
- desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;
- ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.

Tópicos /subtópicos

Operações com números naturais

Objetivos específicos
a) Estimar somas e diferenças.

b) Compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório.

c) Reconhecer situações envolvendo a divisão.
d) Usar os sinais +, -, x e : na representação horizontal do cálculo
e) Estimar somas, diferenças e produtos.
f) Adicionar, subtrair e multiplicar utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito.
g) Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação.
h) Resolver problemas envolvendo adições, subtrações e multiplicações.

Conexões

Regularidades

Capacidades transversais

Resolução de problemas

Compreensão do problema
Conceção, aplicação e justificação de estratégias

Raciocínio matemático

Justificação
Formulação e teste de conjeturas

Comunicação matemática

Interpretação
Representação
Discussão

Grupo B[28]

Tarefas

Tarefas propostas

Tarefa	Objetivos específicos	Ideias e procedimentos a desenvolver	Tempo
I – Como estamos na multiplicação? [29]	a); b); d); f)	- Cálculo aditivo. - Noção de multiplicação. - Explorar o registo através de tabelas.	120 min
II - Vamos contar narizes, mãos, dedos de uma mão e dedos de duas mãos[30]	a); b); d); f); g)	- Cálculo aditivo. - Noção de multiplicação. - Utilização de tabelas proporcionalidade. - Construir as tabuadas do 2, 5 e 10. - Relações entre tabuadas. - Regularidades na multiplicação por 10.	180 min
III – E se adicionarmos duas linhas da tabuada? [31]	d); f); g)	- Exploração de sequências estruturadas de operações. - Descoberta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição a partir de uma investigação sobre as linhas da tabuada.	120 min
IV – O João e as tabuadas[32]	d); f); g)	- Explorar as relações entre as diferentes tabuadas.	120 min

[28] Elaborada pelo grupo B, Candeias, R.,Esteves, S.,Sousa, I., no âmbito da experimentação do novo PMEB

[29] Tarefa adaptada de Multiplicação e Divisão – ESE de Lisboa

[30] Tarefa adaptada de Multiplicação e Divisão – ESE de Lisboa

[31] Tarefa adaptada de um artigo em Quadrante – Associação de Professores de Matemática

[32] *Tarefas sobre Números – 1º Ciclo*, Brocardo e Serrazina

		- Noção de dobro.	
V- Aperitivos	b); d); f); g); h)	- Dominar o cálculo aditivo. - Compreender o princípio da duplicação por repetição. - Desenvolver a noção de multiplicação. - Compreender as noções de dobro e de metade. - Construir a tabuada do 2 e do 3. Até ao 24.. - Explorar relações entre tabuadas. - Utilizar a linha numérica dupla.	180 min
VI - Cem ovos	b); d); f); g); h)	- Dominar o cálculo aditivo. - Ter as noções de dobro e de metade. - Utilizar a linha numérica dupla. - Construir as tabuadas do 6 e do 12. - Explorar relações entre as tabuadas.	180 min
VII – As pastilhas	a); b); d); f); g); h)	- Utilização de tabelas proporcionalidade. - Utilizar a linha numérica dupla. - Explorar relações entre as tabuadas.	90 min
VIII - Comprimidos	b); d); f); g); h)	- Compreender a noção de dobro e de metade. - Utilizar a linha numérica dupla. - Construir a tabuada do 8 até ao valor 24. - Fazer decomposições do 24. - Encontra múltiplos dessas decomposições.	180 min
		Avaliação	180 min
TOTAL			22:30 min

Planificação das tarefas

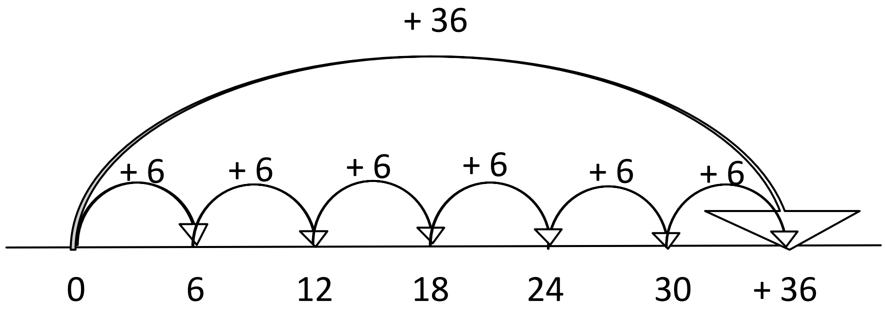
Tarefa I: Como estamos na multiplicação?
Descrição da Tarefa Rotinas (15 minutos) O número do dia Apresentação da tarefa (15 minutos) Os dois problemas serão apresentados aos alunos simultaneamente e num momento coletivo. Os enunciados serão lidos coletivamente. Para cada um dos problemas será esclarecido o que se pretende. Os problemas serão recontados por um dos colegas. Antes de os alunos iniciarem a resolução individual serão discutidas possíveis resoluções dos problemas. Realização da tarefa (15 min + 15 min + 15 minutos) Os dois problemas devem ser resolvidos individualmente, já que com esta tarefa se pretende perceber quais as estratégias de cálculo que os alunos estão a usar individualmente na resolução de problemas com contextos de multiplicação. Discussão/Sistematização (45 minutos) No final da resolução de cada um dos problemas, os alunos apresentarão diferentes estratégias de resolução. Essas estratégias serão identificadas com o nome dos alunos e serão discutidas coletivamente. (O professor deverá ter o cuidado de verificar quais as resoluções que os alunos estão a utilizar para que no momento de discussão não se repitam estratégias). No final pretende-se agrupar os tipos de estratégias que os alunos utilizaram, para que possam constituir como ponto de partida para o trabalho a realizar com a multiplicação.
Organização da Turma A turma irá trabalhar em momentos de trabalho coletivo e de trabalho individual.
Tempo Está previsto para trabalho na tarefa 60 minutos + 60 minutos
Materiais

- Ficha de trabalho
- Material de contagem (caso algum aluno precise para contagens).

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

No que diz respeito ao primeiro problema, os alunos poderão utilizar a contagem um a um, já que todos os lápis estão representados na figura.

Também poderão marcar na reta (graduada ou não) os saltos, representando cada salto o número de lápis em cada conjunto.



Utilizando um esquema de saltos, poderão utilizar uma tabela

Grupo de Lápis	1	2	3	4	5	6
Nº	6	12	18	24	30	..

Outra estratégia que os alunos poderão utilizar será a dos dobros, associada a factos básicos conhecidos:

Os alunos sabem que, se um grupo de lápis tem 6 lápis, dois grupos terão 2 x 6, ou seja 12 lápis. Então, 4 grupos de 6 lápis, 2 x (2 x 6), terão o dobro de dois grupos, ou seja 24 lápis. Assim podem chegar ao número de lápis em 4 grupos, para saber de 6 grupos basta juntar mais dois grupos de 6 (12).

2 x 6 = 12

4 x 6 é o dobro de 2 x 6, então é 2 x 12 = 24

24 + 12 = 24 +10 + 2 = 34 + 2 = 36

Também poderão utilizar factos básicos memorizados:

5 x 6 = 30

30 + 6 = 36

Ou 3 x 6 = 18 O dobro de 18 é 36. Propriedades das operações (distributiva da multiplicação, associativa e comutativa da adição): 3 x 6 + 3 x 6 = 18 + 18 = 18 + 2 + 16 = 20 + 16 = 36 5 x 6 + 1 x 6 = 30 + 6 = 36 2 x 6 + 2 x 6 + 2 x 6 = 12 + 12 + 12 = 10 + 10 + 10 + 6 = 36 Facto básico memorizado 6 x 6 = 36

Estratégias de cálculo utilizadas na resolução dos problemas

Estratégias utilizadas	1º problema	2º problema
Contagem um a um		
Contagem por saltos (utilizando ou não o modelo da reta)		
Representa grupos e objetos em grupos, e conta um a um		
Adições repetidas		
Dobros		
Utiliza factos básicos memorizados		
Utiliza referências para a multiplicação (multiplicação por 10, por 100)		
Utiliza a propriedade distributiva		
Não conseguiu encontrar nenhuma estratégia adequada à resolução do problema		

Nome: ____ Data: ___/ ___/

1. Observa e responde. Regista a forma como pensaste.

	Para a sala de aula o professor comprou os lápis, representados na imagem. Quantos lápis comprou o professor?

2. Observa e responde. Regista a forma como pensaste.

	Numa prateleira do supermercado há 8 embalagens iguais à da figura. Quantas são as garrafas ali existentes?

Tarefa II: Vamos contar narizes, olhos, dedos de uma mão e dedos de duas mãos
Descrição da Tarefa Rotinas (15 minutos) Decomposição de números Apresentação da tarefa (15 minutos) A tarefa será apresentada aos alunos, num momento coletivo. Um dos alunos irá ler o enunciado em voz alta. Outro aluno irá contar o que é pretendido com a tarefa, pelas suas próprias palavras. Antes dos alunos iniciarem a resolução deverão discutir possíveis estratégias de resolução. Realização da tarefa (10 minutos + 10 minutos + 10 minutos) Os alunos irão resolver a pares ou individualmente cada uma das questões da tarefa. Discussão (60 minutos) Após os alunos responderem a cada uma das questões da tarefa, existirá um momento de discussão coletiva. Neste momento será distribuída uma tabela pelos alunos para que façam o registo do trabalho efetuado. Sistematização (60 minutos) No final da discussão e registo dos resultados, os alunos deverão registar na tabela da multiplicação os múltiplos de 2, de 5 e de 10 até pelo menos ao 12 x … Também farão o registo no caderno dos múltiplos registados na tabela: 1 x 2 = 2 2 x 2 = 4… Os alunos devem ser estimulados a memorizar as tabuadas do 2, do 5 e do 10, que já foram construídas e registadas. Também devem observar a regularidade na multiplicação por 10. Outro trabalho de sistematização poderá ser as relações dentro de cada tabuada: 2 alunos têm 4 olhos 4 alunos têm oito olhos 8 alunos têm 16 olhos (2 + 2 … + 2 ou 8 x 2) 5 alunos têm 10 olhos

10 alunos têm 20 olhos Então 15 alunos têm 30 olhos (5 x 2 + 10 x 2 = 10 + 20 = 30)
Organização da Turma Momentos de trabalho coletivo, trabalho individual e trabalho a pares.
Tempo 180 minutos
Materiais - Folha de trabalho - Grelha de sistematização
Possíveis caminhos a seguir pelos alunos Em relação ao número de narizes alguns alunos ainda poderão ter que contar o número de alunos (ou fazer o desenho) e fazer a correspondência para o número de narizes. Outros alunos verificarão logo se existem 21 alunos e se cada aluno tem um só nariz, então existem 21 narizes. No que diz respeito ao número de mãos, alguns alunos poderão ter que desenhar os 21 alunos com duas mãos cada um, para depois contar as mãos uma a uma. Outros alunos poderão efetuar saltos de dois em dois, para saber o número total de mãos (recorrendo a modelos como a reta numérica ou uma tabela). Também é possível que utilizem resultados já conhecidos: Se fossem 10 alunos teriam 20 mãos, porque 10 x 2 = 20; Se fossem 20 alunos teriam 40 mãos, porque se 10 x 2 = 20, então 2 x 10 x 2 = 2 x 20 = 40; Mas como são 21 alunos, serão 2 x 20 mãos, que é 40, mais 2 mãos e ao todo são 42 mãos. 2 x 10 + 2 x 10 + 1 x 2 = 20 + 20 + 2 = 42 No cálculo do número de todos dedos da mão direita, ou do número de todos os dedos das duas mãos, os alunos poderão seguir processos similares aos previstos para o cálculo do número de mãos.

Vamos contar narizes, olhos e dedos

A minha turma … 
1. Na nossa turma há ________ alunos. **1.1. Quantos são os narizes?**
1.2. Quantas são os olhos?
1.3. Calcula o total de dedos só da mão direita de todos os alunos.
1.4. E o total de dedos das duas mãos?

Número de alunos	**Nº de narizes**	**Nº de olhos**	**Nº de dedos das mãos direitas**	**Nº de dedos das duas mãos**

Tarefa III: E se adicionarmos duas linhas na tabuada?

Descrição da Tarefa

Rotinas (15 minutos)

Apresentação de uma estratégia de cálculo de subtração/adição.

Apresentação da tarefa (20 minutos)

Distribui-se por cada par de alunos 3 feijões. Pretende-se fazer um registo de feijões que os dez pares da turma possuem. Assim levam-se os alunos a pensarem num registo utilizando a multiplicação no sentido aditivo e regista-se no quadro. Vejamos a quantidade que tem 1 grupo, 2 grupos, 3 grupos,…

1x 3 = 3

2x 3 = 6

3x 3 = 9

4x 3 = 12

5x 3 = 15

6x 3 = 18

7x 3 = 21

8x 3 = 24

9x 3 = 27

10x 3 = 30

Realização da tarefa/ Discussão(40 minutos)

“ E se fossem 11 grupos?...”

Desafiar os alunos a formularem conjeturas, baseado no registo apresentado. Podemos dar uma ajuda:

“vou escolher a segunda linha do registo, **2 x 3 = 6** e a quinta linha do registo, **5 x3 = 15.** Vamos adicionar 2 +5 = 7. Agora repara na sétima linha, 7 x 3 = 21. Que descobriste? Que relação observas entre os números, destes registos?”

Assinala-se com giz de cor as linhas atrás selecionadas, para que os alunos possam identificar a linha completa e não apenas o respetivo número de grupo ou de ordem.

“Adicionámos o 2 com o 7. Será que há ali mais qualquer coisa que poderemos descobrir?”.

Levar os alunos a adicionarem os produtos, **6 + 15 = 21** (6 como produto ou resultado do segundo registo, 15 como produto ou resultado do quinto registo e 21 como produto ou resultado do sétimo registo).

Distribui-se por cada par de alunos uma ficha de trabalho, para que cada par possa investigar o que acontecerá com a adição de outras linhas, escolhendo números cuja soma não ultrapassasse o dez, proporcionando a descoberta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição a partir de mais algumas investigações.

<u>Sistematização (45 minutos)</u>

Em grande grupo, turma, analisam-se as experiências que os alunos vão apresentando à turma. Em simultâneo serão apresentados os registos efetuados, no quadro.

Organização da Turma

A turma trabalhará em grande grupo (momento de apresentação da tarefa e de discussão) a pares e individualmente (ficha de trabalho).

Tempo

120 minutos

Materiais

feijões

Ficha de trabalho

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

À medida que os alunos vão explorando a tabuada do três, poder-se-á explorar a tabuada do 4 (já a conhecem como o dobro do dobro de …), proporcionando a descoberta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição a partir de mais uma investigação.

Nome: ____ Data: _____/_____/_____

E se adicionarmos duas linhas da tabuada?

1. Escolhe duas linhas da tabuada do **3**.

Regista como pensaste.

2. Escolhe mais duas linhas da tabuada do **3**.

Regista as tuas descobertas

3. Agora imagina que queríamos saber quantos feijões estão em 16 grupos de 3 feijões. Como poderíamos saber utilizando duas linhas da tabuada do 3?

Regista como pensaste.

4. E em 18 grupos de 3, quantos feijões estão? Calcula.

Regista como pensaste.

0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =
1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =
2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =
3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =
4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =
5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =
6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =
7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =
8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =
9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =
10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =

0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =	0 x 3 =
1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =	1 x 3 =
2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =	2 x 3 =
3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =	3 x 3 =
4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =	4 x 3 =
5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =	5 x 3 =
6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =	6 x 3 =
7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =	7 x 3 =
8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =	8 x 3 =
9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =	9 x 3 =
10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =	10 x 3 =

Tarefa IV: O João e as tabuadas

Descrição da Tarefa

Rotinas (15 minutos)

Rotinas de cálculo (multiplicação)

Apresentação da tarefa (20 minutos)

O João sabe a tabuada do 2. Descobriu que a partir desta era muita fácil construir as tabuadas do 4 e do 8.

Consegues dizer o que fez o João?

Mais tarde descobriu que se soubesse bem as tabuadas do 2, do 3 e do 5, conseguia construir todas as outras. Consegues explicar o que vai na cabeça do João?

Realização da tarefa (20 minutos)

Os alunos, apares irão encontrar estratégias que confirmem, ou não, a afirmação do João.

Discussão (35 minutos)

Em grande grupo, proceder-se-á a apresentação das diferentes realizações, com clarificação de conceitos e atribuindo significado às possíveis conclusões. Formulam conjeturas e testam-nas, em diferentes contextos.

Sistematização (30 minutos)

Elaboração de um quadro síntese com as principais conclusões ou até generalizações.

Organização da Turma

Trabalho coletivo e trabalho a pares

Tempo

120 minutos

Materiais

- Folha de trabalho

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

2 x 2 = 4 então 3 x 2 = 2 x 2 + 2 = 6

2 x 2 = 4 então 4 x 2 = 2 x 2 x 2 = 8 ou 2 x 2 + 2 x 2 = 4 + 4 = 8

5 x 2 = 10 porque 4 x 2 = 8 então 5 x 2 = 4 x 2 + 2 = 10

6 x 2 = 12 porque 6 x 2 = 3 x 2 + 3 x 2 = 6 + 6 = 12 ou porque é 5 x 2 + 2 = 12

7 x 2 = 14 porque é 5 x 2 + 2 x 2 = 10 + 4 = 14

8 x 2 = 16 porque é 2 x 4 x 2 = 16 ou porque é 4 x 2 + 4 x 2 = 8 + 8 = 16

9 x 2 = 18 porque é 10 x 2 – 2 = 20 - 2 = 18 ou 3 x 3 x 2 = 18

10 x 2 = 20 porque é o dobro de 5 x 2 então é o dobro de 10 é igual a 20.

O mesmo poderá ser feito para as tabuadas do 5 e do 10.

Nome: ____Data: ____/____/____

1.

O João sabe a tabuada do 2. Descobriu que a partir desta era muita fácil construir a tabuada do 4.

Observa o que o João fez para descobrir uma parte da tabuada do 4.

1 x 4 = 4 x 1 = 4 ou 2 x 1 x 2 = 2 x 2 = 4

2 x 4 = 2 x 2 x 2 = 4 x 2 = 8 ou 2 x 4 = 4 x 2 = 8

3 x 4 = 2 x 3 x 2 = 6 x 2 = 12 ou 3 x 4 = 2 x 4 + 1 x 4 = 8 + 4 = 12

4 x 4 = 2 x 4 x 2 = 8 x 2 = 16 ou 4 x 4 = 2 x 4 + 2 x 4 = 8 + 8 = 16

5 x 4 = 2 x 5 x 2 = 10 x 2 = 20 ou 5 x 4 = 3 x 4 + 2 x 4 = 12 + 8 = 20

Será que consegues continuar e descobrir a tabuada do 4 até 12 x 4..

6 x 4 = ____

7 x 4 = ____

8 x 4 = ____

9 x 4 = ____

10 x 4 = ____

11 x 4 = ____

12 x 4 = ____

O João também viu que era fácil descobrir a tabuada do 8.

Consegues dizer o que fez o João?

Mais tarde descobriu que, se soubesse bem as tabuadas do 2, do 3 e do 5, conseguia construir todas as outras. Consegues explicar o que vai na cabeça do João?

2.

Será que consegues descobrir

A Maria sabe muito bem a tabuada do 2 e do 5. A tabuada do 10, a que considera mais fácil, também a sabe na "ponta da língua". Anda intrigada a tentar descobrir, a partir das tabuadas que conhece, o valor de alguns produtos. Por exemplo, já conseguiu calcular o valor de 6x4 de várias maneiras diferentes:

6x4 = 6x2x2 = 12x2= 24

6x4 = 4x6= 4x5 + 4x1= 20 + 4 =24

6x4 = 5x4 + 1x4 = 4x5 +4 = 20 + 4 =24

- Consegues explicar o que a Maria fez?

- Usando o modo de pensar da Maria descobre diferentes formas de calcular:

4x7, 9x8, 7x7 e 12x9.

- Descobre outros produtos que consigas determinar usando o mesmo tipo de raciocínio

- Usando estes processos achas que consegues construir a tabuada do 3 e do 4? Que produtos não consegues descobrir?

Tarefa V: Aperitivos
Descrição da Tarefa Rotinas (15 minutos) - Rotinas de cálculo (multiplicação) Apresentação da tarefa (45 minutos) A folha de trabalho é apresentada aos alunos num momento coletivo. Os alunos irão colocar algumas questões. É feito um levantamento de questões das quais se poderão destacar as seguintes: - Quantos pedaços de queijo foram precisos cortar para fazer todos os aperitivos? - Quantas salsichas se gastaram a fazer todos os aperitivos? - Quantas fatias de tomate foram precisas cortar para fazer os aperitivos? - Cada tomate dava 6 fatias. Quantos tomates foram necessários? - Cada lata tinha 20 salsichas. Quantas latas se compraram? As questões serão colocadas num lugar visível da sala. Realização da tarefa (30 minutos + 30 minutos) Os alunos irão resolver os dois grupos de questões a pares. Cada par deve criar um registo com a proposta de resolução que depois deve apresentar aos colegas. No final da resolução de cada grupo de questões existirá um momento de discussão coletiva. Discussão (30 minutos + 30 minutos) A discussão será feita coletivamente, tendo como base as resoluções propostas pelos diferentes pares.
Organização da Turma Trabalho coletivo e trabalho a pares.
Tempo 180 minutos

Materiais

- Folha de trabalho.
- Folhas de papel manteiga.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Nas três primeiras questões os alunos poderão fazer registos como:

1 criança – 1 espetada – 1 pedaço de queijo

21 crianças – 21 espetadas – 21 pedaços de queijo

Como há uma igualdade numérica, a resposta poderá ser fácil, mas a representação do raciocínio poderá apresentar algumas dificuldades. Poderão surgir expressões como:

$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = 21$

Estas expressões poderão ser aproveitadas para fazer a representação simbólica utilizando: $21 \times 1 = 21$.

A segunda e terceira questão são apropriadas para trabalhar relações de duplicação, no entanto algumas crianças poderão recorrer à adição sucessiva ou à representação icónica.

$2 + 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 = 42$

●● ●● ●● ….

$3 + 3 + 3 + 3 + \ldots + 3 = 63$

●●● ●●● ●●●

Por já ter sido trabalhada a multiplicação, também poderão surgir registos multiplicativos como $21 \times 2 = 42$ e $21 \times 3 = 63$

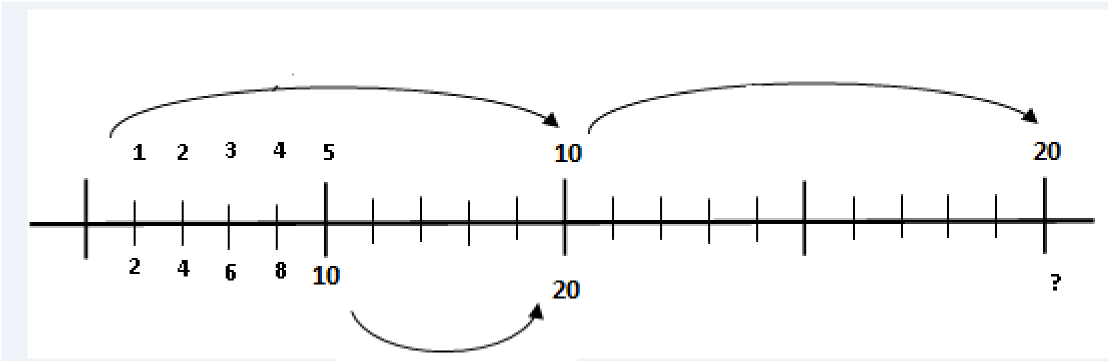
Alguns alunos poderão também apresentar uma sequência representada numa tabela (ou no caso da questão das fatias de tomate ser a cada termo n corresponder um termo 3n):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	19	20	21
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	…	38	40	42

Se os alunos estiveram a escrever toda a sequência será oportuno questionar se do décimo termo da sequência para o vigésimo não acontecerá o mesmo (o dobro) do que do 2º para o 4º, ou do 5º para o 10º.

A noção de dobro poderá assim ser mais uma vez trabalhada.

Também poderá ser aqui trabalhado o modelo da reta dupla:



Nas últimas duas questões os alunos também poderão utilizar a reta numérica.

Ou esquemas idênticos ao seguinte:

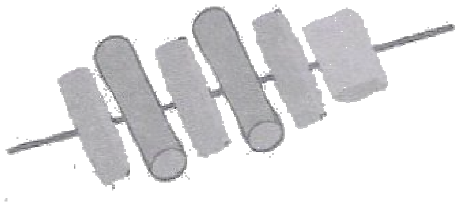
3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3

6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6

…

As retas numéricas duplas também poderão ser outro suporte importante na resolução desta questão.

Aperitivos na festa de anos do Miguel



24 crianças

mesa de 4 lugares

1 Tomate dá 6 fatias

Tarefa VI: Cem ovos

Descrição da Tarefa

Rotinas (15 minutos)

Estimativa 12 x 8 =.

Apresentação da tarefa (20 minutos)

Apresenta-se o problema de modo a incentivar os alunos a utilizar os produtos que conhecem, tais como 5x6 (ou 6x5) e 10x6 (ou 6x10).

Realização da tarefa/ Discussão(40 minutos)

Regista-se no quadro as seguintes hipóteses:

A pelo menos 5 caixas

B pelo menos 10 caixas

C pelo menos 15 caixas

"100 ovos! Acham que é muito?"

"O que acham? Mais ou menos quantas caixas de 6 ovos é que serão precisas?"

"Escolham entre A, B e C e expliquem porquê."

Depois de os alunos terem apresentado várias sugestões, organiza-se uma tabela no quadro como a seguinte:

1x6	6	Não chegam
2x6	12	Não chegam
5x6	30	Não chegam
10x6	60	Não chegam
20x?????	60 e 60	Mais que 100!

Conclusão: São precisas mais que 10 caixas, mas menos que 20!

Distribui-se por cada aluno uma ficha de trabalho.

Em grupos de pares os alunos têm que determinar o número exato de embalagens que são necessárias para os 100 ovos. Pede-se aos grupos que primeiro determinem o número de caixas de 6 ovos e depois de 12.

Cada grupo deve organizar as suas contagens ou os seus cálculos na folha de trabalho, de modo a poderem explicar como chegaram a uma resposta.

Sistematização (15 minutos)

Em grande grupo, os alunos exporão as suas estratégias de resolução que serão exploradas após registo das mesmas no quadro.

Para formar as caixas de 6 ovos os alunos podem:

- tentar formar 100 por adição repetida: 1 caixa = 6; 2 caixas = 12; etc.;
- prolongar a tabuada do 6: 10x6060; 11x6=66; 12x6, etc… .
- utilizar uma quantidade conhecida (um produto) para diminuir o número de contagens:

- 10 caixas = 60 ovos, depois formam novas caixas começando a partir de 60 ovos (10 caixas);

60+6=**66** → 66+6=**72** → 72+6=**78** → 78+6=**84** → 84+6=**90** → 90+6=**96**

11 caixas **12** caixas **13** caixas **14** caixas **15** caixas **16** caixas

- 5 caixas = 30 ovos, partindo de 5 caixas e juntando de 30 (5 caixas) em 30 (5 caixas)

10 caixas → 30+30=60

15 caixas → 60+30=90

- A tabela inicial pode também ser explorada:

5x6	**30**	Não chegam
10x6	**60**	Não chegam
15x6 → 10x6 + 5x6	**60+30=90**	Faltam 10 ovos Logo: uma caixa e uma parte de outra. Preciso de mais 2 caixas. **Ao todo 15+2=17**

Para formar as caixas de 12 ovos os alunos podem usar procedimentos semelhantes aos anteriormente usados com as embalagens de 6 ovos. Por exemplo:

- tentar formar 100 por adição repetida:

1 caixa=12;

2 caixas=12+12=24, etc…

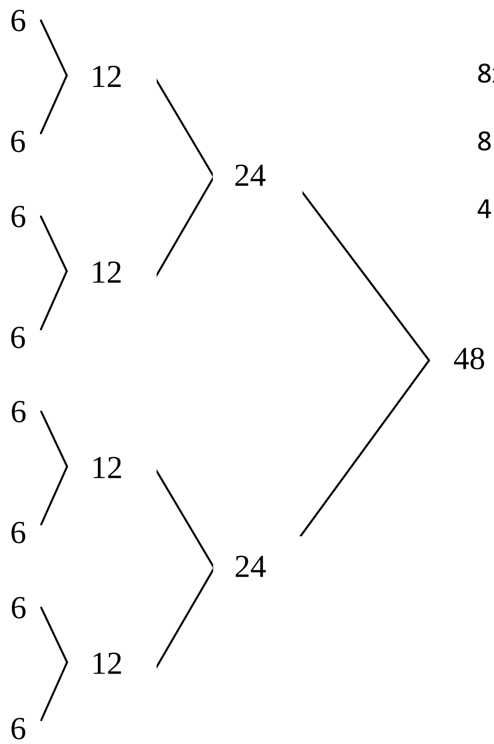
- usar a tabuada do 12

1x12=12

2x12=12+12=24

1x12	12	1 caixa
2x12 → 12+12	24	2 caixas
4x12 → 24+24	48	4 caixas
8x12 → 48+48	96	Pelo menos 8 caixas de 12

No final, estabelece-se a relação entre o dobro e a metade e a consigam usar para calcular produtos iguais. Para perceber esta relação a partir do caso concreto das caixas de 6 e 12 ovos, pode-se usar uma organização como a seguinte:



8x6=4x12=2x24=1x48

8 caixas de 6 ovos é tanto como 4 caixas de 12 ovos

4 caixas de 12 é tanto como 8 de 6 e 4 de 8

Organização da Turma

A turma trabalhará em pares e grande grupo (momento de apresentação da tarefa e de discussão).

Tempo

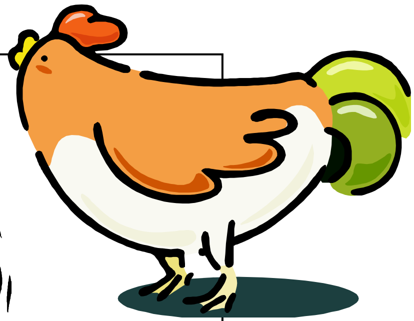
90 minutos + 90 minutos (aula seguinte)

Materiais Ficha de trabalho
Possíveis caminhos a seguir pelos alunos Os alunos poderão usar diferentes estratégias, recorrendo á adição ou à multiplicação. Alguns alunos, como não conseguem obter 100 ovos com um número exacto de caixas, dizem que “é impossível”. O facto de 100 ovos não preencherem caixas inteiras ”perturba-os” e têm alguma dificuldade em aceitar/concluir que não há problema em ficar com espaços vazios numa caixa. No entanto, um aluno que explorou esta tarefa parece ter *aproveitado* a discussão em torno do número de ovos que se teria com as 9 caixas de 12 ovos completas. Este aluno percebeu que 108 (9 caixas de 12 ovos) corresponde a 3 camadas e que só teria de adicionar o número de ovos correspondente às duas camadas que faltavam.

Nome: ____ **Data:** ___/ ___/ ______

Quantas caixas?

Como de podem embalar?



Tarefa VII : As pastilhas
Descrição da Tarefa Rotinas (15 minutos) Apresentação de uma estimativa de cálculo de subtração/adição. Apresentação da tarefa (20 minutos) Apresenta-se uma lista de preços de 1,2,4 e 8 pastilhas e é pedido o preço de 5,7 e 10 pastilhas. A finalidade é que os alunos usem os preços conhecidos e, de modos diferentes, calculem os preços pedidos. Realização da tarefa/ Discussão (40 minutos) Como os preços estão em cêntimos, são usados números de referência e progressivamente maiores, 20, 40, 80 e 160. Pretende-se ainda que os alunos consigam aplicar conhecimentos que têm vindo a adquirir, nomeadamente os relacionados com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Distribui-se por cada aluno uma ficha de trabalho. Sistematização (15 minutos) Em grande grupo, os alunos exporão as suas estratégias de resolução que serão exploradas após registo das mesmas no quadro.
Organização da Turma A turma trabalhará em grande grupo (momento de apresentação da tarefa e de discussão) e individualmente (ficha de trabalho).
Tempo 90 minutos
Materiais Ficha de trabalho
Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Os alunos poderão usar diferentes estratégias, recorrendo á adição ou à multiplicação. Uma outra estratégia poderá ser o recorrer ao cálculo anterior para calcular o seguinte, recorrendo à adição ou, ainda, usar o cálculo seguinte, recorrendo à subtração.
No caso de 10 pastilhas podem chegar ao 10 sabendo o preço de 2 e de 8 pastilhas ou simplesmente multiplicar por dez, usando relações conhecidas, como seja a contagem em dezenas.

Nome: ____ Data: _____/_____/_____

As pastilhas

1. Observa a lista de preços de algumas quantidades de pastilhas que estão na montra de um café.

1 pastilha	20 cêntimos
2 pastilhas	40 cêntimos
4 pastilhas	80 cêntimos
8 pastilhas	160 cêntimos

1.1. Se quiseres comprar 5 pastilhas, quanto gastarás?

Regista a tua estratégia de cálculo

R: ____

1.2. Se quiseres comprar 7 pastilhas, quanto gastarás?

Regista a tua estratégia de cálculo

R: ____

1.3. E 10 pastilhas? Indica duas formas de pensar diferentes.

Uma estratégia

R: ____

Outra estratégia

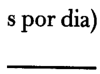
Tarefa VIII: Comprimidos
Descrição da Tarefa Rotinas (15 minutos) Apresentação de uma estratégia de cálculo de subtração/adição. Apresentação da tarefa (20 minutos) Apresenta-se um problema à turma a partir de uma história: *Manuel conta a Ana Carolina que no sábado passado tinha ido a uma médica, porque estava doente, e que estava a tomar comprimidos de Melhorex: 1 comprimido de 6 em 6 horas.* *A Ana Carolina riu-se porque há uma semana atrás também tinha ido a uma médica e também começou a tomar um comprimido de Melhorex, só que de 8 em 8 horas.* *O medicamento e a quantidade eram iguais: 2 caixas de Melhorex de 2 placas de 24 comprimidos cada uma.* *_ Tomo mais do que tu _ diz o Manuel -* *A Ana Carolina pensa um pouco e responde hesitante:* *_ Sim… mas como… como comecei antes de ti, se calhar…parece-me que vamos terminar os comprimidos ao mesmo tempo.* "Será que a Ana Carolina tem razão?" Antes de explorar explicitamente o problema, anota-se no quadro as reacções espontâneas dos alunos como "hipóteses a testar": "Será que o Manuel toma ou não mais comprimidos por dia que a Ana Carolina? Esta é uma das questões que decorre durante o diálogo entre eles (*Tomo mais do que tu*) " È importante que os alunos compreendam: o que a Dra Paula Matoso quer dizer quando escreve *1 comprimido de 8 em 8 horas e 1 comprimido de 6 em 6 horas.* Questionar os alunos de forma a apresentarem interpretações e ajudá-los se necessário, a pedir explicações complementares. Realização da tarefa/ Discussão(40 minutos) Pedir aos alunos para desenharem as suas representações e ajudá-los a utilizar estes desenhos para comparar e justificar as diferentes interpretações das receitas. Os alunos podem esquematizar as receitas de diferentes formas: a)- Contando as horas uma a uma (contagem dupla: uma para a sequencia das horas e

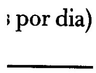
uma para o número de horas) ou adicionando por repetição:1,2,3,4,5,6,7,8 --- 1º comprimido ou 8

9(1), 10(2), 11(3), 12(4), 13(5), 14(6), 15(7), 16(8) ---- 2º comprimido ou 8+8 =16

17(1), 18(2), 19(3), 20(4), 21(5), 22(6), 23(7), 24(8), --- 3º comprimido ou 16+8 =24

b)- Com o relógio e/ou com saltos sobre a linha numérica





c)- Construindo a tabuada de 8 e do 6 até 24

Ana Carolina	Manuel
1x8 =8 2x8 = 16 3x8 = 24	1x6 = 6 2x6 =12 3x6 =18 4x6 =24
3 comprimidos por dia	4 comprimidos por dia

Os alunos poderão utilizar as estratégias que acharem convenientes de forma a que concluam que Manuel tem razão. Ele toma mais 1 comprimido por dia que Ana Carolina: 4 em vez de 3. Isto quer dizer que ele acaba as caixas mais depressa que a Ana Carolina.

<u>Sistematização (15 minutos)</u> Em grande grupo serão debatidas as estratégias utilizadas que levou os alunos a concluir qual dos dois meninos tinha razão, bem como as estratégias utilizadas para calcular a duração do tratamento (em semanas). As descobertas ou conclusões que se entendam enriquecedoras, apresentadas pelos alunos, serão registadas no quadro.
Organização da Turma A turma trabalhará em pares e grande grupo (momento de apresentação da tarefa e de discussão).
Tempo 90 minutos + 90 minutos (aula seguinte)
Materiais Ficha de trabalho
Possíveis caminhos a seguir pelos alunos Os alunos podem abordar e resolver o problema de várias maneiras: - construindo as tomas de comprimidos de modo a formar as placas e as caixas (contando sistematicamente por grupos de 3 e de 4 ou utilizando a tabuada do 3 e do 4); - partindo do número total de comprimidos que foram receitados, duas caixas de 2x24 comprimidos (contando sistematicamente por grupos de 3 e de4 a partir de 24 – uma caixa, ou de 48 – duas caixas); - aliar a representação às placas (o Manuel 1 fila por dia, 6 dias 1 placa, 12 dias 2 placas, 24 dias 4 placas; Ana Carolina 3 comprimidos por dia, 8 dias 1 placa, 16 dias 2 placas, 32 dias 4 placas).

Nome: ____ **Data:** _____/_____/_____

Comprimidos

1. Quem toma mais comprimidos por dia, o Manuel ou a Ana Carolina?

____

Regista como pensaste

2. Quanto tempo durou o tratamento do Manuel?

____

Regista como pensaste

3. Quanto tempo durou o tratamento da Ana Carolina?

____

Regista como pensaste

Anexo D - Relatos de aula

Relatório de Experimentação/ Balanço

Tarefa: "Os itinerários do Capuchinho vermelho"

A tarefa "Os itinerários do Capuchinho vermelho" foi elaborada em grupo de trabalho, e é a quinta de uma sequência de tarefas no âmbito do tópico Orientação Espacial.

Tema : Geometria

Tópico: Orientação espacial

Data de realização da aula: 7 e 8 de Outubro de 2008 (2 blocos de 90 minutos)

Escola: EBI de Santo Onofre

Professor: Maria Isabel Martins de Sousa

Principais conceitos matemáticos trabalhados na aula: Vocabulário/termos posicionais

Capacidade transversal mais saliente na aula: Comunicar oralmente, recorrendo à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Caracterização da turma

A turma B do 1º ano de escolaridade é constituída por 24 alunos, com idades compreendidas entre os 5 e os 7 anos de idade. Frequentam pela primeira vez o 1º ano, 23 alunos. Apenas o aluno D, está matriculado no segundo ano mas a trabalhar conteúdos programáticos do primeiro ano.

No que se refere ao nível sociocultural dos alunos da turma, este é maioritariamente proveniente de um meio socioeconómico médio e médio - baixo, tendo em consideração os dados das fichas individuais dos alunos**.** Nove alunos da turma foram contemplados com subsídio escolar, cinco mencionados no escalão A e quatro alunos no escalão B.

No que diz respeito à maturidade dos alunos da turma, vem referenciado do Jardim de Infância, com relatório descritivo, o aluno L, de seis anos com atraso de dois anos no seu desenvolvimento global.

Tendo em conta, os dois pontos referidos anteriormente (maturidade dos alunos e o seu percurso escolar) foram observados inicialmente na turma diferentes níveis de aprendizagem para os quais será necessária a adequação de diferentes estratégias e metodologias de trabalho. Três das crianças que compõem a turma não frequentaram Jardim de Infância, C, D e V. É também importante referir que o aluno D é imigrante (nacionalidade russa) revelando algumas dificuldades na língua portuguesa, sendo necessário um maior apoio individualizado.

Relativamente às relações interpessoais a maioria das crianças mantém um relacionamento aceitável com os colegas, professoras e restante comunidade escolar. São crianças alegres, irrequietas e extrovertidas.

No que diz respeito ao aproveitamento é já notório, crianças que se destacam por uma maior autonomia nas tarefas apresentadas, pelo ritmo de trabalho e pelas aquisições feitas. Maioritariamente a turma acresce em autonomia aquando do trabalho individual. Ainda apresentam momentos de atenção/concentração muito curtos, intervalando com frequência o trabalho individual ou em grande grupo.

Em relação à Matemática as crianças aderem com algum entusiasmo às tarefas propostas. Esta postura está relacionada com os pré-requisitos da grande maioria (apenas 7 alunos não identificam os algarismos); a grande parte das tarefas apresentadas terem carácter lúdico, ou de fácil resolução; em aprendizagens informais; por cálculo; por contagens em dedos ou material concreto…

1. Tarefa (parte I)

Rotinas: Número do dia

Após a leitura da história (adaptada) “O Capuchinho vermelho”, os alunos exploraram o vocabulário: dentro/ fora; atrás/ à frente/entre; em cima/em baixo; à direita/ à esquerda.

Em grande grupo, os alunos discutiram o percurso aconselhado pela mãe da menina do capuchinho vermelho indicando o ponto de partida (casa da menina), virar à esquerda, encontrar a cerca dos olivais, voltar novamente à esquerda, descer dois sulcos e atinge o ponto de chegada (casa da avó).

Verificam que o itinerário indicado pelo lobo era diferente e tinha como intuito ganhar tempo para chegar a casa da avó, primeiro que a menina.

Após esta análise, em grande grupo, comparámos os diferentes itinerários (voltando à leitura da história) e registando no quadro os itinerários traçados. Identificam o mais curto.

Posteriormente foi fornecida a cada criança uma grelha em que os alunos registaram o percurso mais longo, seguido pela menina até chegar a casa da avó. Para aferirmos os dados, considerámos um passo um lado da célula da grelha.

Exemplo do percurso:

→↓ →→→→→→→ ↓↓ →→→→ ↓↓↓↓→

(andou um passo para a direita e desceu um sulco, de seguida deu sete passos para a direita e apanhou flores, no interior da cerca. Já fora da cerca desceu quatro sulcos por baixo da ponte da ribeira seca, e posteriormente deslocou-se quatro passos para a direita. Para chegar a casa da avó desceu mais quatro sulcos e avistou à direita a casa da avó).

Discussão em grande grupo da importância e funcionalidade do correto uso do vocabulário posicional, do saber dar orientações usando termos posicionais. Apresentaram à turma vivências dentro deste âmbito.

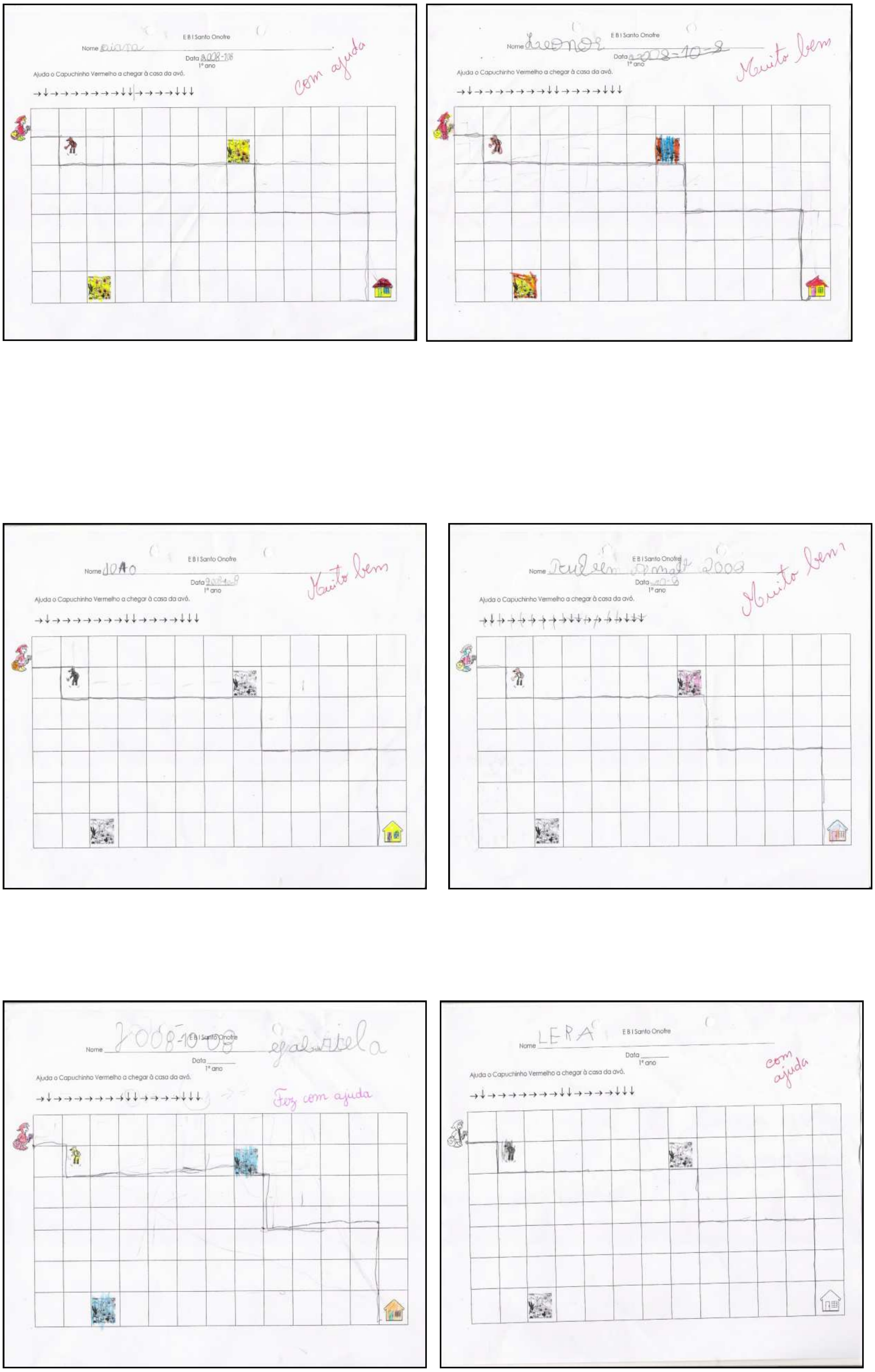


Fig. 1 Exemplos de registos

2.Tarefa (parte II)

<u>Rotinas</u>: Número do dia

Em grande grupo recontam a história “O capuchinho vermelho”. Os alunos voltaram a explorar o vocabulário: dentro/ fora; atrás/à frente/entre; em cima/em baixo; à direita/ à esquerda.

Solicitou-se que relembrassem o percurso realizado pelo Capuchinho vermelho, indicando o ponto de partida (casa da menina), pontos intermédios (local de encontro com o lobo e local onde apanhou flores) e o ponto de chegada (casa da avó), tendo como objetivo o correto emprego da terminologia espacial.

A orientação das professoras foi direcionada para o itinerário, tendo em consideração que o não cumprimento do mesmo, levou a menina a ser comida pelo lobo. Assim sendo as crianças oralmente utilizaram a terminologia espacial adequada quer para o itinerário que deveria ter feito, quer para o indicado pelo lobo, após encontro com o mesmo.

Como tarefa integradora foi solicitado às crianças que fizessem um desenho da história respeitando o momento de encontro do Capuchinho vermelho com o lobo (entre o lobo e a menina estava uma árvore; a menina tinha ao seu lado direito a árvore, o lobo tinha a árvore, ao seu lado esquerdo e atrás estaria a floresta

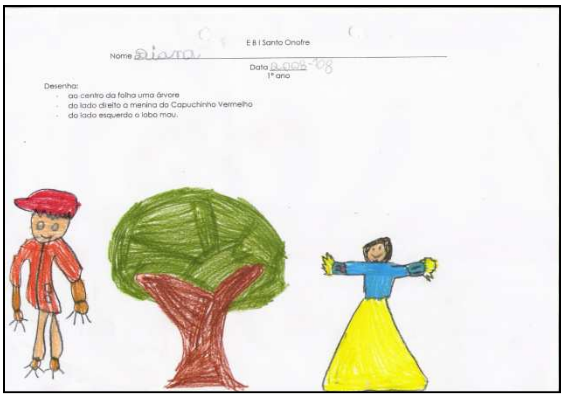


Fig.2 Registos dos alunos onde é visível a orientação espacial em relação a um objeto

De seguida foi distribuído aleatoriamente, por cada criança um dos itinerários descritos na história.

As crianças foram levadas para o recreio. Pediu-se aos alunos que seguissem as orientações registadas no papel e que o fizessem usando um passo normal para verificar se estariam corretas as orientações impressas.

Fig. 3

Estabeleceu-se o ponto de partida "a casa do Capuchinho vermelho" e cada criança seguiu um dos itinerários desenhado no chão, a giz de cor, que dizia respeito ao registo em papel, que cada um segurava na mão.

Todos chegaram "a casa da avó" (ponto de chegada). Verificam mais uma vez, que o itinerário aconselhado pelo lobo era mais longo. Outras crianças distraíram-se e não conseguiram chegar ao ponto pretendido, pelo caminho mais curto. Assim foi pedido a dois alunos que os conduzissem (M e J), corrigindo direções, tendo em consideração o registo no papel e as marcas representadas no chão.

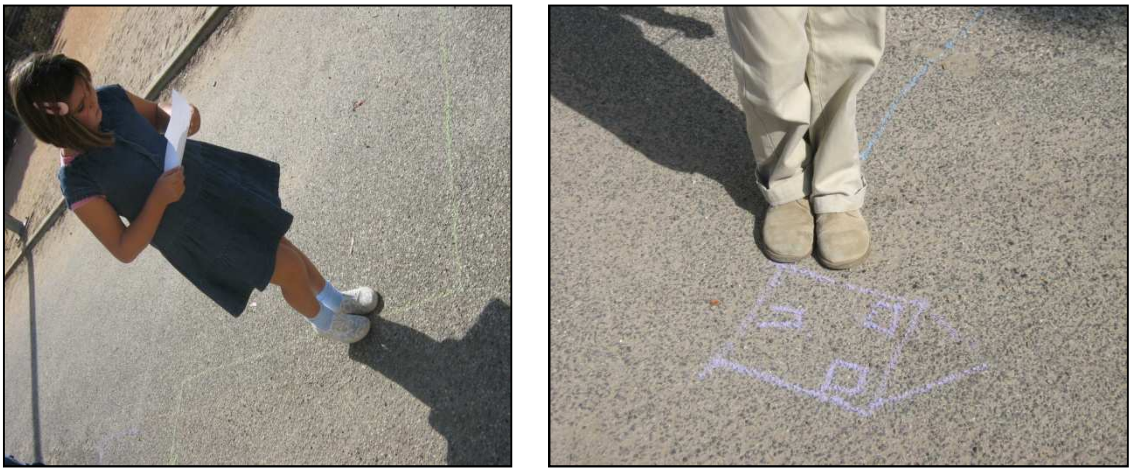


Fig.4

De volta à sala de aula, refletimos sobre a importância da boa utilização do vocabulário posicional, no dia a dia. Foram mencionadas situações várias, de pessoas que não conhecendo a cidade pedem informações para chegar a um local, as chamadas para o INEM onde é de uma importância vital que saibamos especificar a localização e descrever itinerários ou estabelecer pontos de referência.

Gestão da aula pelo professor

Cada uma das tarefas apresentadas demorou 90 minutos. Toda a turma conseguiu concluir as tarefas apresentadas. Apesar da heterogeneidade do grupo, aproveitou-se o tempo, que para algumas crianças sobrou, pelo ritmo de trabalho mais rápido, para explorar melhor o tópico oralmente. Discutir com os alunos como é difícil dar orientações a quem não distingue direita e esquerda; a importância dos mapas no registo de itinerários; exposição de vivências alusivas a passeios acidentados por pequenos enganos de itinerários e soluções adotadas na altura.

Na implementação da primeira tarefa, o primeiro momento colidiu com a introdução da história. Chamou-se a atenção para algumas alterações para as quais eles deveriam prestar atenção, pois aquela história diferia da já conhecida, por ser para meninos maiores e com outra facilidade de compreensão. Esta introdução ocupou cerca de 20 minutos da aula.

A exploração do conteúdo lido, com maior incidência para os itinerários apresentados e posteriormente representados no quadro (cerca de 40 minutos).

O trabalho individual, registo na grelha e ilustração (cerca de 10 minutos).

Discussão coletiva e reflexão orientada (20 minutos).

Na segunda aula, continuação da tarefa, a introdução da aula coincidiu com o reconto ora da história e breve exploração (cerca de 10 minutos).

Relembrar "momentos chave" da história, especificar localizações e descrever relações espaciais, (20 minutos).

Registo icónico de um dos "momentos chave", (cerca de15 minutos).

Identificar, no chão do recreio qual dos itinerários representados no chão, a giz de cor e feito de segmentos de reta (horizontais e verticais), representaria o registo que cada um levava consigo, impresso em papel com pequenas setas direcionadas, quer para a direita, quer para a esquerda, quer para cima ou para baixo… e dar indícios espaciais às crianças que "se perderam", cerca de 30 minutos.

Discussão coletiva e reflexão orientada, cerca de 15 minutos.

A gestão da aula decorreu sensivelmente como estava previsto. As principais dificuldades prendem-se com o pequeno grupo, já mencionado em outras alíneas, que por falta de pré requisitos, por se distraírem com mais facilidade ocupam mais tempo na elaboração dos trabalhos e "perdem-se" nos itinerários. Contudo esta situação inopinada foi aproveitada para outros colegas utilizarem termos posicionais, num trabalho colaborativo, mediante a observação das linhas, verticais e horizontais, representadas no chão. Entendo que reforçar a aprendizagem, dentro do tópico "Orientação espacial" aliada novamente ao lúdico (a história e a atividade no recreio) facilita a apreensão e a fácil utilização dos termos posicionais.

A planificação é uma intenção do que se pretende pôr em prática. Estabelecendo continuidade a tarefas já implementadas, ordenando "momentos chave", dos quais depende em muito o atingir ou não os objetivos inicialmente propostos. Com frequência tomo decisões a meio do percurso por entender que situações imprevistas possam ser uma mais valia, que durante a previsão da tarefa, não me ocorrera e que no momento da concretização é importante explorar.

Na tarefa, a inflexão do percurso que mais se destacou foi o aproveitar da situação dos meninos que por brincadeira não conseguiram identificar o itinerário que lhes competia, e ocorreu no momento, serem dois colegas a orientar, seguindo os indícios espaciais representados direcionando-os até ao fim do itinerário. Na reflexão também aproveitámos esta situação para prevenirmos situações pouco agradáveis e até perigosas que se prendem com o incumprimento das orientações recebidas, ou mal formuladas.

Trabalho dos alunos na tarefa

A generalidade dos alunos da turma atingiu os objetivos previstos para esta tarefa, com exceção dos alunos, que não possuem pré requisitos/ conhecimentos anteriores informais abordados no ensino pré – escolar, e que estão pela primeira vez a utilizar estes termos, em contexto de ensino/aprendizagem. Portanto podemos referir cinco alunos da turma (NEEs) não atingiram a generalidade dos objetivos propostos para esta tarefa nesta duas aulas. Considerando-se no entanto uma atividade positiva para todos os alunos pois mais uma vez trabalharam conceitos e compreenderam qual a sua importância na aprendizagem deste tema.

Os alunos desenvolveram a capacidade transversal da comunicação matemática, verbalizando oralmente o itinerário do Capuchinho Vermelho na história. Por exemplo um aluno referiu (L. atraso de desenvolvimento) que afinal aconteceu tudo isto ao Capuchinho porque ela virou à direita no seu trajeto.

As dificuldades sentidas na aplicação da tarefa prendem-se essencialmente com a hesitação de alguns alunos na utilização da terminologia adequada de esquerda e direita, pelos motivos já referidos na alínea anterior.

Na implementação desta tarefa os aspetos positivos mais relevantes a salientar prendem-se com a entrega de todos os aluno na execução e implementação da tarefa que foi encarada como jogo/ desafio em que os registos escritos se relacionaram com a leitura/ interpretação de um esquema de setas e o desenho do trajeto.

A tarefa proposta teve três momentos distintos. Inicialmente os alunos trabalharam no grande grupo turma explorando oralmente a história, destacando-se conexões ao nível da Língua Portuguesa, também por estar a ser abordado vocabulário matemático (à frente, a trás, direita, esquerda, em cima, de baixo, interior, exterior.

Num segundo momentos da aula e depois de todos terem participado, com exposições espontâneas e outras dirigidas, sobre o trajeto que o Capuchinho vermelho deveria ter seguido (sempre em frente, pelo exterior da floresta) e o trajeto que a menina acabou por fazer, foram verbalizados os conceitos pretendidos. Os alunos individualmente recorreram ao registo escrito ao traçarem eles próprios o trajeto do Capuchinho numa ficha direcionada com as orientações (em *setas*).

No aula do dia seguinte foi recapitulada a atividade efetuada no dia anterior e os novos conceitos matemáticos aprendidos tendo a exploração da tarefa sido concluída com os alunos organizados em dois grupos, tendo cada grupo (A e B) que seguir um itinerário diferente que não levaria ao mesmo ponto de chegada. De modo a que todos compreendessem e identificassem a necessidade de saber identificar a terminologia adequada dentro da orientação espacial. De novo, os alunos debateram e apresentaram as suas ideias sobre o tema em discussão “os percursos ou itinerários” e as orientações inicialmente fornecidas. Tendo desta forma, e com estas três atividades ligadas à tarefa atingindo os objetivos específicos registados.

A tarefa proposta conseguiu envolver os alunos e prender a sua atenção em todos os momentos, tendo em conta a características e a heterogeneidade da turma, o que para nós representou um fator positiva. Os momentos de diálogo eram inerentes à tarefa tendo superado as expectativas, também por se tratar da exploração de uma história tradicional conhecida por todas a s crianças.

Avaliação global da tarefa

A tarefa, tal como foi proposta, adequa-se à generalidade dos alunos do 1º ano de escolaridade. Consideramos que a tarefa conseguiu motivar os alunos desde o início com a leitura da história, sendo o seu carácter lúdico uma mais valia na captação da atenção da turma.

De um modo geral, os alunos aderiram muito bem à tarefa em todos os momentos da aula. É importante salientar que a origem da tarefa surgiu com uma ideia de uma grelha de *Ilustração 1itinerário* disponível na plataforma “moodle” que foi adaptada a um contexto concreto. Utilizaram conceitos/ terminologias espaciais, a par com a comunicação/ verbalização dos itinerários na história.

Um aspeto que também considerámos importante nesta tarefa foi o facto de todos os alunos terem um papel ativo na execução das atividades propostas, mesmo aqueles cujas intervenções são habitualmente escassas.

No momento da aula em que os alunos saíram para o exterior e tiveram que seguir um dado itinerário puderam perceber que o grupo que não tinha o percurso A (o itinerário aconselhado pela mãe). Demoraram mais tempo a chegar ao ponto pretendido, dado o percurso ser mais confuso e até enganoso. Este momento de concretização real foi importantíssimo para a consolidação dos objetivos pré definidos.

Ainda foi possível refletir e testar as competências dos alunos ao traçar um itinerário seguindo a orientação dada, por dois alunos, às crianças que por distração se “perderam”. Pudemos então observar que a maioria dos alunos conseguiu traçar o caminho proposto.

Tarefa: Contar cubos

A tarefa “Contar cubos” foi elaborada em grupo de trabalho, e é a quarta de uma sequência de tarefas no âmbito do tópico Números Naturais.

Tópico: Números naturais

Tema: Números e Operações

Data de realização na aula: 19/11/2008

Escola: EBI de Santo Onofre

Professora: Maria Isabel Martins de Sousa

Principais conceitos matemáticos trabalhados na aula:

– Realizar contagens progressivas e regressivas até 5

– Decompor e compor quantidades até 5.

– Realizar contagens progressivas e regressivas até 10

– Decompor e compor quantidades até 10.

– Traduzir numa representação as composições e decomposições (representadas na grelha) por escrito.

– Comunicar oralmente as diferentes estratégias de contagem.

Capacidade transversal mais saliente na aula: Comunicação matemática

1. Tarefa

A tarefa “Contar cubos” foi adaptada de uma brochura, cedida num dos momentos da Formação, com um conjunto de propostas de tarefas no âmbito do tópico – Números naturais. As tarefas aqui mencionadas visam atingir os objetivos de aprendizagem previstos para este tema, através da utilização de materiais manipuláveis que auxiliam os alunos a efetuarem contagens e a representarem as respetivas quantidades.

A tarefa "Contar cubos", foi quase toda ela descrita e trabalhada tal como a brochura a apresentava, apenas repetimos o procedimento da primeira torre para a construção da segunda alterando assim, o momento que antecedia a ilustração na grelha, da coluna 8. As pequenas alterações surgiram no decorrer da aula, por exposições feitas pelos alunos e para as quais é fundamental a construção de novas referências adesivas aos objetivos previstos inicialmente.

A tarefa foi trabalhada numa aula de 90 minutos.

Gestão da aula pelo professor

A tarefa decorreu numa aula de 90 minutos. As tarefas trabalhadas em aulas que antecederam a tarefa "Contar cubos", debruçaram-se essencialmente na estruturação do 5 e progressivamente *caminhávamos* até ao 10, mantendo como referência o 5. Assim toda a turma realizou o trabalho previsto à exceção do aluno L. (atraso de desenvolvimento), que apenas construiu a torre com quatro cubos. Contudo dadas as características do aluno, pode considerar-se que o L. trabalhou muito bem.

Contar cubos

<u>Rotinas</u>: Estimativas

<u>Apresentação da tarefa</u>

Apresenta-se à turma um conjunto de cartões com numerais até 5.

<u>Realização da tarefa</u>

Pede-se a cada aluno que levantem os dedos das mãos de forma a corresponderem com os numerais indicados no cartão (estes são apresentados de forma não sequencial). Durante esta primeira parte, há o propósito de evidenciar a importância do recurso dos dedos de uma das mãos, tendo o numeral 5 como referência, como forma de apoio sempre disponível para contagens.

Após esta primeira parte, são distribuídos alguns cubos de duas cores por todas as mesas. Propõe-se então que construam torres de acordo com os numerais que os cartões vão mostrando (de forma não sequencial).

Entretanto pede-se a alguns alunos, um de cada vez, que conte os cubos da sua torre em voz alta (noção de cardinal). Esta contagem poderá ser feita de 1 em 1. Contudo poderá apelar-se para o facto de existirem duas cores e incentivar a contagem por cores (2+2 são 4; 3+1 são 4).

(4+2 são 6; 6+1 são7) ou (3+3 são 6; 6+2 são 8; 8+1 são 9)

Após a contagem e mantendo a torre, a cada criança é distribuída uma grelha quadriculada, em que cada quadrado corresponde à face dos cubos. Com o seu preenchimento pretende-se que os alunos identifiquem o numeral que corresponde ao número de cubos de cada torre. As crianças devem colorir as quadrículas conforme a sua torre.

Desafiam-se as crianças a construírem uma nova torre com o numeral indicado num cartão a apresentar (8).

Oralmente apresentam as formas de contagem, incentivando o abandono da contagem 1 a 1.

Cada criança pinta na grelha a nova torre.

"Como pensaram pintar?"

"Quantos cubos tem a mais a torre do 8 que a do 4?"

"Qual é a torre que devemos juntar à torre do 4 para obter a do 7?"

"Quantos quadrados tem torre de 6 a mais que a do 4?"

"Quantos quadrados tem torre de 5 a mais que a do 1?" "E que a do 4?"

…

Discussão

Os alunos em grande grupo expõem as suas estratégias de contagem. A discussão será mais interessante se colocarem questões de modo a realçar a sequência numérica e a evidenciar a ordenação dos números. Para tal poderão colocar-se questões do tipo:

“Qual o número que está antes do 4?” “E após o 4?” “Agora conta para trás.” “Conta a partir do 4.”

A aula decorreu como estava previsto, quase que me atrevo a acrescentar “melhor que o previsto”. Primeiro, a distração quase constante de um pequeno grupo, tem sido a dificuldade que mais prevejo na implementação das tarefas, sentindo-me desencantada quando no meu entender as tarefas são tão ricas em formas de aprendizagens e a distração de alguns alunos tem limitado e em muito, o atingir dos objetivos a que me proponho.

Contudo, esta aula foi gratificante porque a grande maioria dos alunos empenharam-se e comunicaram diferentes estratégias de contagem e conseguindo traduzir para a escrita essas formas de contagem (composição e decomposição do numeral).

O material usado revelou-se adequado pela forma fácil de manipular e de realizar diferentes contagens e também pelo empenho sentido, no ambiente de aula. Tendo em consideração diferentes níveis de conhecimentos prévios dos alunos, esta tarefa deu também oportunidade de modelar situações de aprendizagens, o L (atraso de desenvolvimento) construiu apenas uma torre e representou-a na grelha, contudo soube interpretar o seu trabalho.

A comunicação em turma resultou muito bem, o que facilitou o registo individual. Não consigo definir o que resultou melhor. A comunicação resultou bem, segundo o encadeado da tarefa, teve muito a ver com a boa interpretação da quantidade ou contagem dos cubos (material fácil de manipular), duas cores (torna ainda mais fácil a contagem).

O plano contemplava a composição e decomposição de numerais. Para tal os alunos já utilizam no seu registo individual alguma simbologia (+). Durante a exposição oral de um aluno (F, com um comportamento desajustado, muito distraído e com dificuldade em se sentar), aquando da estratégia de contagem da torre com oito cubos, apresentou no quadro o seguinte registo (10-2 são 8), o que levou a estabelecer ainda mais uma relação entre conceitos matemáticos, ou seja assegurar-me que os alunos compreendem as diferentes representações usadas.

Trabalho dos alunos na tarefa

Tal como já mencionei anteriormente, os alunos empenharam-se na tarefa e surpreenderam-me na forma como expuseram oralmente as suas diferentes estratégias e como conciliaram essa mesma oralidade com a representação escrita.

Todos os alunos apresentaram o numeral com os dedos das mãos sem dificuldade, tendo quase sempre como referência os dedos de uma das mãos (Fig. 1)

Fig. 1

Questionados sobre a contagem dos cubos, também todos o fizeram, utilizando diferentes formas de contagem. A grande surpresa coube ao L (atraso de desenvolvimento) cujas aquisições, em qualquer uma das áreas de estudo, são pouco notórias.

“Eu contei 1 mais 3” (R com Perturbação Autismo) e registou 1+3 são 4 (Fig.2)

Fig.2

“Eu fiz 2 mais 2” (aluno) e registou 2+2 são 4 (Fig.3)

Fig.3

“Eu tenho 1 mais 1 e mais 1 e 1 (de outra cor) que são 4” (Atraso de desenvolvimento)

Ajudando a fazer o registo ao L” (Atraso de desenvolvimento)

“Então tens 1 cubo, mais 1 cubo e mais …” (professora)

“1 e 1”(aluno)

“Quantos cubos são 1 e 1?” (professora)

Olhando para os números expostos na sala de aula, respondeu:

“2” e completou o registo 1+1+2 são 4. Até agora o L. (atraso de desenvolvimento). apenas reconhecia o numeral 1, contudo olhando para a representação gráfica dos números fez contagens progressivas até ao 5, identificando-os por sequência.

Na torre de 8 cubos, os alunos voltaram a apresentar diferentes estratégias de contagem.

“7+1” (aluno, fig. 4)

Fig.4

“2+2+2+2” (aluno)

“4+4” (aluno)

“5+3” (Déf. cognitivo e dislexia, fig.5) **Fig.5**

"Quantos quadrados a torre de 8 tem a mais que a do 4?" (professora)

"4 (responderam de imediato)

"Da torre do 4 até à torre do 8 estão 4 quadrados sem pintar." (aluno, fig.6)

Fig.6

"E 4 mais 4 são 8." (aluno)

"Qual é a torre que devemos juntar à torre do 4 para obter a do 7?" (professora)

"A do 3, porque 4 mais 3 são7." (aluno)

"Quantos quadrados a torre do 6 tem a mais que a do 4?" (professora)

"2 porque 4 mais 2 são 6, e também contei os quadrados que estão pintados que a outra torre não tem." (aluno)

"Quantos quadrados a torre do 5 tem a mais que a do 1?" "E que o 4?" (professora)

(Responderam vários ao mesmo tempo)

Foram ainda colocadas questões como:

"Qual o número que está antes do 4?" " E depois do 4?" (professora)

"Qual o número que está antes do 8?" " E depois do 8?" (professora)

Ao propor contagens progressivas e regressivas, que estão habituados a fazer, o F. (acompanhamento psicológico) pediu para fazer o registo da contagem da sua torre. Ao chegar ao quadro disse:

“Os meus cubos são todos da mesma cor, não queria fazer 1+1+1…até 8, posso ao 10 tirar 2, (em simultâneo mostrava os dedos), mas não sei escrever tirar.”

Fig.7

Então representei a forma de contagem usando a simbologia (-) 10-2 são 8. Aproveitei para desafiar os alunos pedindo para pensarem numa outra forma de representação que igualasse a do F, com a mesma simbologia (-).

“8 mais os dois dedos escondidos são 10” respondeu novamente o F. (que parece sempre distraído e com dificuldade em se sentar)

“10-2 são 8 ou 8+2 são 10.” (F aluno com acompanhamento psicológico)

Por falta de tempo não explorámos muito esta relação, que ficará para a próxima aula.

A turma não revelou dificuldades na realização da tarefa nem na comunicação, talvez por termos trabalhado bastante a composição e decomposição do numeral 5.

O F apesar de muito querer fazer o registo no quadro, ainda faz registos na folha com uma representação gráfica de difícil interpretação.

Esta aula tranquilizou-me pela maneira como os alunos estabeleceram relações e efetuaram contagens, de forma mais rápida e mais consistente.

O modo de trabalho individual, penso que foi adequado, dado que cada um pode optar por estratégias próprias de contagem, e de registo. Um outro aspeto também importante é que sendo um trabalho a desenvolver individualmente torna mais fácil, para o professor detetar dificuldades.

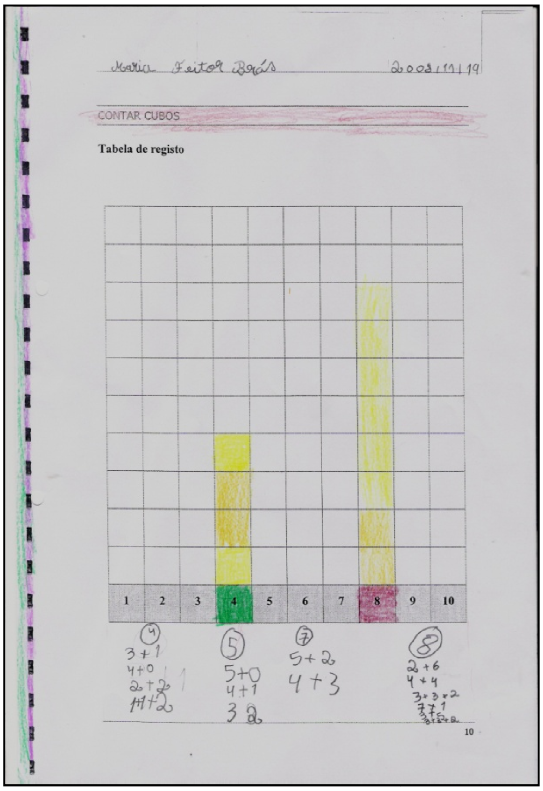
Durante a aula, os alunos comunicaram as diferentes estratégias e comentaram as estratégias já mencionadas mas que também eram as deles. O H, fig.8, apercebendo-se que a sua forma de contagem (torre 4) já tinha sido apresentada, pediu um cubo diferente a uma colega e registou (1+1+2)

Fig.8

Avaliação global da tarefa

A tarefa, tal como foi proposta, adequa-se à generalidade dos alunos deste ano de escolaridade. Para confirmar temos a prestação do L. (atraso de desenvolvimento) e conseguiu acompanhar a tarefa até à representação da torre com 4 cubos. Um outro ponto a favor prende-se com o facto de ser uma tarefa apelativa e com material de fácil manipulação.

por
re



A comunicação trouxe a oportunidade de usar e familiarizarem-se com diversos tipos de registo, compreendendo o significado de cada um deles, através da visualização da torre de cubos e da representação da mesma na grelha, que cada aluno tinha na sua mesa, aliado a conhecimentos prévios existentes. Estes conhecimentos estão interligados, desde as tarefas já implementadas cuja prática tem favorecido o desenvolvimento do sentido do número, como também todo o trabalho no âmbito do tópico *Organização e interpretação de dados*, onde os alunos representaram dados, interpretaram e tiraram conclusões. Assim facilitou a interpretação da representação dos cubos na grelha com base na disposição dos mesmos.

Gostámos muito de implementar esta tarefa e da maneira simples como ela ajustou saberes e despertou outras necessidades a serem trabalhadas futuramente.

Tarefa: joaninhas e folhas

Tema: Números e operações

Tópico: Números naturais

Data de realização na aula: 16 e 17 de Março de 2009

Escola: EBI de Santo Onofre

Ano de escolaridade: 1º Ano

Principais conceitos matemáticas trabalhados na aula:

- Sentido da adição (combinar e acrescentar);
- Sentido da subtração nos sentidos (retirar, comparar e completar);
- Representação horizontal do cálculo aditivo e subtrativo.
- Utilização de factos numéricos básicos aditivos e sua mobilização para situações de subtração.

Capacidades transversais salientes na aula:

Resolução de problemas

- Compreensão do problema
- Conceção, aplicação e justificação de estratégias

Raciocínio matemático

- Justificação
- Formulação e teste de conjeturas

Comunicação matemática

- Interpretação
- Representação

– Discussão

1. **Tarefa**

A tarefa realizou-se em duas aulas consecutivas de 90 minutos. Um primeiro objetivo da tarefa era a construção individual e em grande grupo, de ferramentas de matematização que os ajudassem a transpor níveis de cálculo. Um outro objetivo relacionava-se com a organização da aprendizagem e da forma como ela é apresentada aos colegas, oralmente e/ou através de registo. Um outro aspeto também tido em consideração foi a intencionalidade dos contextos e dos números a trabalhar, proporcionando a compreensão do número e a sua relação com as operações adição e subtração. Não se pretendia que os alunos interiorizassem e compreendessem apenas as diferentes decomposições da quantidade 15, mas que desenvolvessem o sentido do número pela descoberta de relações numéricas. A adaptação da tarefa *Joaninhas e folhas*, resultou da ligação com outras experiencias de aprendizagem, numa sequência de tarefas, numa trajetória de aprendizagem com as desejáveis conexões planificação-aprendizagem, já referida anteriormente. (Ver também Anexo…)

(1ª aula)

Joaninhas e folhas

<u>Rotinas:</u> Identificam dobros e quase dobros.

<u>Apresentação da tarefa</u>

Distribuiu-se por cada criança uma folha de papel com duas folhas de árvore desenhadas e 15 feijões” (joaninhas). Contou-se uma história, *O passeio das quinze joaninhas*, canalizando o interesse das crianças para a investigação de diferentes maneiras de representar o número (15) com a soma de duas parcelas.

Convidaram-se as crianças a colocarem as *joaninhas* de diferentes formas sobre as *folhas* e, em simultâneo, registarem a quantidade de joaninhas representadas em cada uma das folhas.

Realização da tarefa

Os alunos mostraram-se entusiasmados com a proposta e imediatamente iniciaram o trabalho.

“Quantos arranjos diferentes consegues descobrir?” (professora)

“Eu já consegui muitos… 5 arranjos mas há mais” (aluno)

“Registem as vossas descobertas.” (professora)

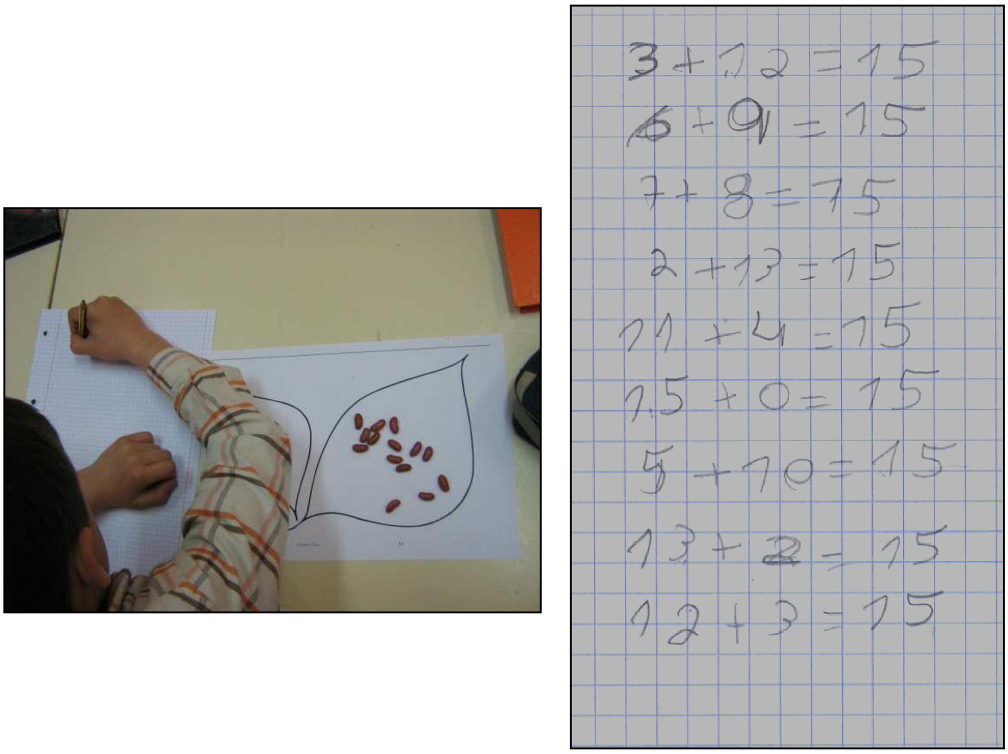


Fig.1

Os alunos iam colocando aleatoriamente os feijões nas folhas e registavam o número existente, em cada *folha*, em cada uma das parcelas (Fig.1). Em muitas situações era visível a repetição de exemplos de representação do número 15.

“Poderá haver ainda outras possibilidades ou arranjos? (professora)

“Acho que tenho todas.” (aluno)

A organização do registo, assumiu um papel de maior relevo no decorrer da aula, pelo desfasamento do número de possibilidades de representar o número 15, entre os vários alunos.

“Observa o teu registo, há possibilidades que já repetiste. Será que não haverá outros arranjos que ainda não tenhas experimentado?” (professora)

Foi dado enfoque aos registos ordenados, pela oportunidade de organização de todos os arranjos possíveis, não esquecendo outras possibilidades de representar as 15 *joaninhas*.

Alguns alunos reiniciaram o registo, organizando-o. (fig.2)

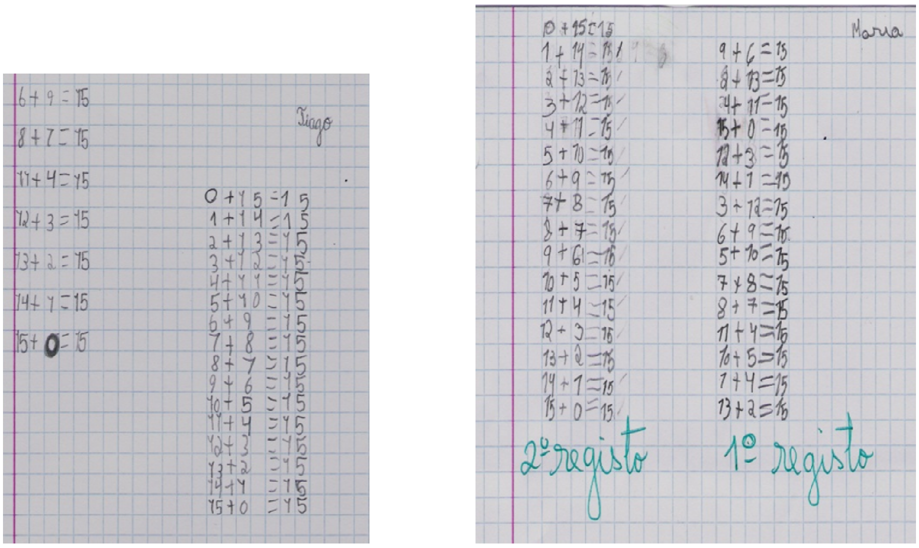


Fig.2

Comparando os dois registos facilmente compreenderam que havia arranjos que não tinham sido experienciados, por isso não foram registados.

Havia também alunos que davam por concluído o registo, ou porque o reorganizaram e concluíram que tinham presente todas as possibilidades, ou porque intuíam que detinham o número total de representações. Outros necessitaram de mais tempo pois efetuaram a contagem das *joaninhas*, uma a uma.

Maioritariamente os alunos contaram as joaninhas em grupos de 2, de 4… e um outro grupo apreendia o número de *joaninhas* pelo todo (subitizing, reconhecem a quantidade através da mancha sem necessidade de contar)

Foram colocadas algumas questões aos alunos, ativando a descoberta de uma leitura mais fácil e rápida num registo organizado.

"Se tiverem 9 joaninhas numa folha, quantas estarão na outra folha?" (professora)

"6. " (aluno lendo o registo)

"Porquê?" (professora)

Pretendia-se que em simultâneo mobilizassem modelos (pensando na posição dos números na reta numérica e poder posicionar o número para a frente e para trás, ao longo dela ou modelos baseados em números de referência), bem como conceitos já trabalhados, na relação entre números (dobros, quase dobros, factos numéricos básicos…)

"Dez mais cinco são quinze e se for dez menos um é 9 e o cinco fica com mais um é seis, é como dez mais cinco… é como no ábaco." (um outro aluno)

"Parece que alguns colegas não compreenderam muito bem, explica melhor." (professora)

"Em vez do 9 eu pensei no 10 então acrescentei mais 1 que vou tirar a seguir no 6 e fica 5 então 10 + 5 =15 ou 9 + 6 = 15"(foi registando no quadro)

O aluno partiu do trabalho já feito com o ábaco horizontal, centrado na estruturação do 5 e do 10 estabelecendo mentalmente relações aditivas.

"Ou nove mais um e depois mais cinco também dá quinze." (a mesma estratégia apresentada por outro aluno)

Insistiam na estruturação à volta do 10, com o apoio do modelo trabalhado no ábaco horizontal (acrescento um na linha de cima, retiro um na linha de baixo e mantenho o total de contas).

"Se houver 4 *joaninhas* numa *folha* quantas estarão na outra?" (professora)

"O 4 está perto do 5, 4 + **1** = 5 e 5 + **10** =15 e **10** + **1** = **11**" (aluno)

Esta estratégia revelava a utilização o modelo da reta numérica vazia, contudo colocámos a questão.

“Também pensaste no ábaco como o J?” (professora)

“Fiz como na reta.” (aluno)

(…)

“As joaninhas são sempre 15, se tiro 1 de uma *folha* acrescento na outra.” (aluno)

“A conjetura que acabou de formular a D. é verdadeira?” (professora)

(enquanto observavam o registo…)

“Podemos traduzir as folhas para parcelas de uma adição?” (professora)

“ Podemos è a mesma coisa quando fazemos o registo. Cada *folha* é uma parcela.”

“Quantas representações descobriram para o número 15? (professora)

“12” (aluno)

“14 maneiras de representar o número 15.” (aluno)

“Eu descobri 16.” (aluno)

Perante o desafio os alunos apresentaram aos colegas os seus registos. Tiveram oportunidade de observar a vantagem de um registo organizado na leitura do mesmo, e na perceção das várias possibilidades.

“Vamos testar a hipótese formulada pela D.” (professora)

“É se eu tirar 3 numa parcela coloco mais três na outra parcela e a soma é 15 é sempre assim.” (aluno)

A par da perceção da vantagem de um registo organizado, surge uma outra descoberta a regularidade (quando o primeiro número – parcela – diminui uma unidade, o segundo número – parcela – aumenta uma unidade) não sentindo necessidade de confirmar o cálculo através da contagem.

"É uma regularidade… O número tirado numa parcela é acrescentado na outra parcela." (aluno)

(…)

Discussão/ Sistematização

Inicialmente foi notória a dificuldade de um grupo de alunos, na representação e interpretação do registo individual dado o carácter aleatório que imprimiram na atividade. Contudo, como já foi mencionado, esta situação inopinada trouxe uma boa dinâmica à aula ao realçar o papel facilitador de um registo organizado. Ainda que tenha sido alertado no início da aula para que os alunos seguissem este tipo de registo, há um grupo de alunos que com muita frequência se distrai.

Cada aluno apresentou o seu registo justificado pela observação e consequente contagem. Alguns alunos ao ouvirem os colegas compreenderam que não tinham representado a totalidade de arranjos. Pela desorganização, também por eles verificada, foram convidados a organizarem o seu registo no quadro. Rapidamente compreenderam as vantagens de um registo organizado:

"É mais difícil esquecer um arranjo." (aluno)

"Consigo compreender melhor a relação dos números nas parcelas com o total" (aluno)

"Há uma regularidade, desde a primeira parcela aumenta e depois diminui na outra…1+14 =15; (1+1) = 2; 2 + (14 -1) =15; …(aluno)

"Tira-se de um lado e põe-se do outro e assim são sempre as mesmas joaninhas" (aluno)

"Se eu tiro joaninhas de uma folha coloco na outra tem sempre que dar 15, estamos a decompor como na *tarefa dos cubos*." (aluno)

"São várias maneiras de *partir* o 15" (aluno)

Fig.3

Os alunos inicialmente registaram aleatoriamente os possíveis arranjos das *joaninhas* nas *folhas* e com e decorrer da aula compreenderam, que a leitura e interpretação do mesmo, bem como determinar o número total de arranjos, estava relacionado com a **organização do registo**. (Fig.3)

Foi também visível o desnível existente na turma ao nível da contagem das joaninhas: três alunos **contavam de um em um**, maioritariamente a contagem era efetuada **em pequenos grupos** que dispunham de 2 em 2, de 4 em 4 e de 5 em 5. Um outro grupo apreendia a quantidade no seu todo de forma imediata (**subitizing).**

Nesta experiência de aprendizagem, os alunos foram explorando os seus registos, inicialmente baseada na leitura do mesmo. Sobre o registo foram conduzidos à analise/reflexão da quantidade existente, em cada *folha*. Utilizou-se a comunicação matemática para ilustrar modelos mentais usados no processo de resposta. Os modelos apresentados, baseavam-se na relação entre números, **a reta vazia** e a relação dos números tendo em consideração o **5 e o 10 como números de referência** (ábaco horizontal).

A turma sobre a memorização dos factos numéricos básicos até 10, usou e compreendeu **factos matemáticos básicos até 15**.

(2ª aula)

Joaninhas e folhas

Na aula seguinte, os alunos trabalharam a pares no confronto/comparação do registo e em grande grupo na apresentação e justificação dos registos individuais.

As aulas tiveram início com as *Rotinas: Número do dia*. Os alunos expuseram ao grupo diferentes registo que envolvessem o número 16. Decompuseram o número apresentando-o em somas de diferentes e variadas parcelas; como dobro de 8, como resto resultante de comparação de quantidades ou da diferença entre duas quantidades, relembraram factos numéricos básicos (relembrando factos matemáticos básicos até 15, trabalhado na aula anterior).

Rotinas : Número do dia.

Apresentação da tarefa

Cada criança retirou do dossier a folha de registo da aula anterior e receberam a pares 15 "joaninhas".

Realização da tarefa

Convidaram-se as crianças a pares, a compararem os registos.

Procurou-se que as crianças expusessem à turma as suas observações (registo organizado ou número de arranjos incompleto e de difícil leitura,…) ou formulassem conjeturas, pela descoberta a dois.

"… a partir do meio do registo as parcelas repetem-se só que os números trocam de posição." (aluno)

A descoberta do aluno J. levou a turma a "olhar de novo" o registo e acompanhar o raciocínio do colega, interiorizando que o meio do registo coincidia com a metade do número. O aluno J e a aluna E apontavam como "meio" 7+8 assumindo que a partir desta parcela, os números invertiam a posição.

"O meio é 8" (aluno com Perturbações de Autismo)

"Quer dizer que metade de 15 é 8?" (professora)

"Não a metade é 7 + 8" (aluno)

"Não pode porque os números não são iguais." (aluno)

…

Desafiaram-se as crianças a repensar o registo dos arranjos de 15 *joaninhas*. A metade do registo era marcada pela parcela 7+8, contudo não envolvia dois números iguais. Foi então pedido às crianças que dispusessem as 15 *joaninhas* em duas equipas com igual número ou seja metade em cada equipa. Dispuseram quantidades próximas, 7+7 +1 e 8+ 7. Rapidamente concluíram que ficavam 7 em cada equipa mas sobrava uma, ou colocavam 8 numa equipa e faltava uma, na outra equipa. Foi reanalisada a situação incentivando os alunos a alargarem o campo das abordagens já trabalhadas.

A predisposição para a descoberta foi ficando limitada a um número restrito de alunos.

"A metade de 15 fica entre o 7 e o 8" (aluno DHDA)

"Então como resolver esta situação? Se fossem 15 chocolates no lugar das *joaninhas* e se os quiséssemos repartir, igualmente, por dois meninos, como poderíamos fazer?" (professora)

" Quando a minha mãe nos dá pintarolas a mim e ao D (irmão gémeo, também na turma) e não tem um número *certo* parte ao meio, já sei partimos o feijão, não é uma *joaninha* a sério, não faz mal." (aluno)

"Ficam 7 joaninhas mais metade e é a metade de 15" (aluno)

"É 7 e meio como no dinheiro (…) meio euro que é 50 cêntimos. " (aluno)

"É parecido com os quase dobros, aqui é quase metades." (aluno)

"É quase metades ou é mesmo metade de 15?" (aluno)

"É mesmo metade de 15, 7 mais meio." (aluno)

Foi então um colega registar no quadro 7 e ½ + 7 e ½ = 15

14 + 1 = 15

"Há pouco o M falava que *quando a mãe não tinha um número certo de pintarolas(…)* Afinal o que entendes por um número certo? (professora)

“Um número certo é um número que não deixa nenhum de fora, na metade.” (aluno)

“(…) é um numero par. Esse é mais fácil porque a metade são dois números iguais não sobra nenhum, por isso não precisamos de partir ao meio um deles.” (aluno)

“Podemos testar a vossa conjetura.” (professora)

…(os alunos, a pares foram fazendo descobertas…)

“Nos números pares não sobra nenhum as metades são números iguais.” (aluno)

“Mas 7 e ½ + 7 e ½ , não são duas quantidades iguais?” (professora)

“Não é isso o que queremos dizer é que nos números pares não precisamos de partir um a meio ficam dois números sem o meio.” (aluno)

“Nos números ímpares temos que partir um número ao meio.” (aluno)

”Explica melhor.” (professora)

“É o meio do registo do número é o número menor que está na metade mais meio do outro número.” (aluno)

“Será que podemos generalizar?” (professora)

“Dá para todos os números ímpares.” (aluno)

“Cada par vai testar com um número ímpar à vossa escolha.” (professora)

Um elemento de cada par ia escrevendo no quadro como testaram a conjetura com outros números.

13 = 6+7 ou 13 = 6 + 6 +1   ½ x 13 = 6 e ½

Metade de 11 é 5 e meio porque 5+5+1 =11 e a metade do registo do 11 é 6 + 5

“A A disse há pouco que a metade do número ímpar é o número menor da parcela a meio do registo, adicionado à metade de 1. Observando os exemplos apresentados concordam com ela? (professora)

“Sim porque o número maior é que tem 1 a mais.” (aluno)

(…)

"Vejamos a apresentação da M." (professora)

17 = 9 + 8 ou 17 = 8 + 8 + 1; ½ de 17 = 8 + ½

"A M. acha que a metade de 17 é o número menor da parcela do meio, que é o 8 mais a metade de 1, falta escrever em matemática a metade de 1" (aluno)

Esta observação ajustou-se a outras quantidades ímpares, obrigando a uma ligeira inflexão no percurso da aula.

"Concordam com o H.?" (professora)

"Sim senão parece mais metade de quê…"(aluno)

O H. foi ao quadro e registou:

½ x 17 = 8 + ½ x 1

O aperfeiçoamento do **registo simbólico** foi acompanhado com o **vocabulário matemático.**

Cada par representou no quadro um exemplo de metade, podendo optar por números pares ou ímpares.

½ x 19 = 9 + ½ x 1 Em simultâneo o aluno ia dizendo em voz alta: *metade de 19 é 9 mais metade de 1.*

½ x 16 = 8 *metade de 16 é 8*

Reconhecemos com estas intervenções que nos números ímpares a metade envolve uma quantidade mais meio de um número "o número que sobra".

<u>Discussão/ Sistematização</u>

Na sistematização da tarefa, relembrámos a aula. Em alternância à construção de um quadro individual com o número de formas de arranjar as *joaninhas*, tendo como base o número de feijões, foi entendido que seria mais proveitoso para a turma, preencher essa tabela em grande grupo (Fig.4), ampliando-a e expondo-a no quadro ao mesmo tempo que era observada por todos os alunos.

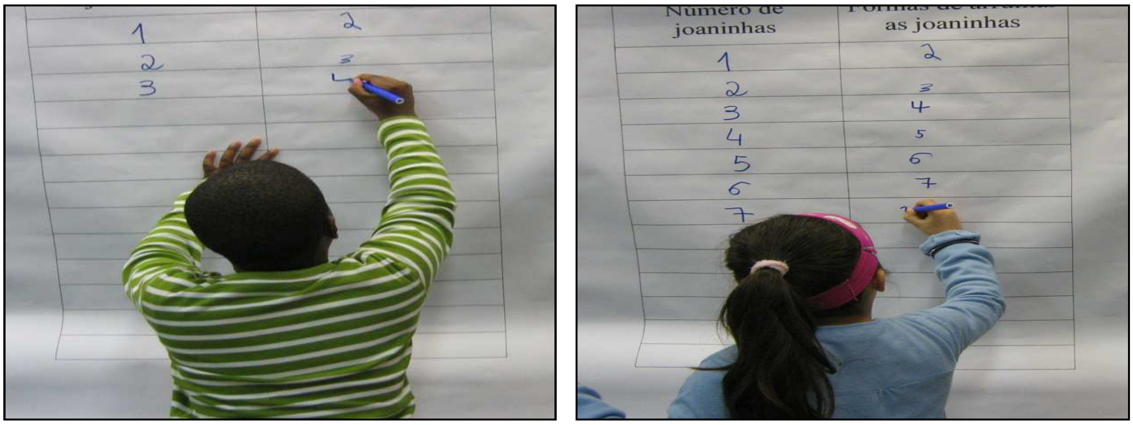


Fig.4

Em grupo de turma, a tabela foi sendo preenchida com o número de *joaninhas* e o respetivo número de arranjos.

“Em números maiores há mais arranjos.”(aluno com Perturbação de Autismo)

“Em 5 *joaninhas* há 6 arranjos mas em 12 já há 13 arranjos.”

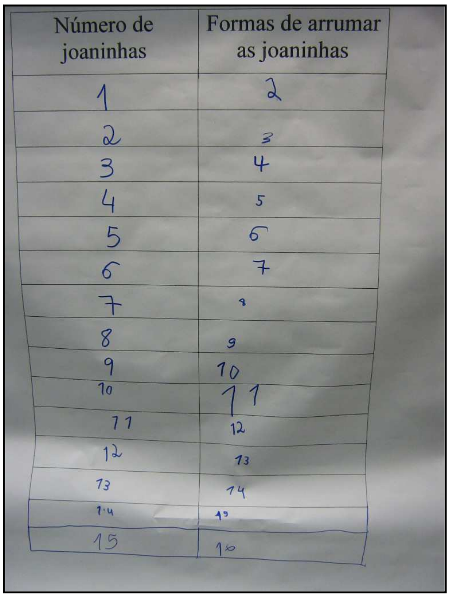
“5 *joaninhas* posso arranjar assim: 0+5; 1+4; 2+3; 3+2; 4+1 e 5+0 são 6” (défice de atenção e dislexia)

“E com 12 há mais 1 que 12 joaninhas são 13 arranjos. É uma regularidade os arranjos são sempre mais 1 que as joaninhas” (aluno Asperger) “Porque na primeira parcela surge o número das joaninhas desde o 0”

“ pois 0, 1, 2, 3, …” (aluno)

…

Cada aluno que mencionava o número de arranjos, em simultâneo registava no quadro (Fig.5) estratégias que justificavam as representações mentais.



Número de joaninhas	Formas de arrumar as joaninhas
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
11	12
12	13
13	14
14	15
15	16

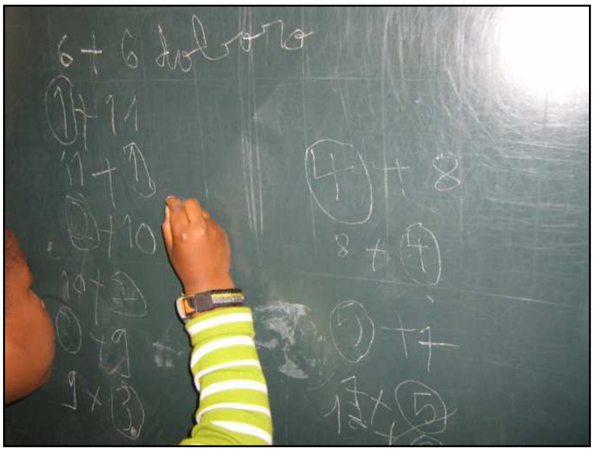


Fig.5

Este aluno demonstrou que com o número 12 surgiam parcelas envolvendo os números de 0 a 12 (6 parcelas mais 6 parcelas e a parcela do 0+ 12) o que perfaz 13 arranjos.

“Se faltar uma parcela sabemos logo qual é, se estiver o registo organizado” (aluno)

As crianças compreenderam as relações na ordenação de números, identificando a metade do número, ou seja ampliaram o seu ***sentido de número***. A tarefa proporcionou uma boa oportunidade para que os alunos desenvolvessem relações entre os números e pudessem apresentar essas relações aos colegas, “pensando em voz alta” e propusessem **generalizações**. Um outro aspeto a salientar é que os alunos, inicialmente contavam as *joaninhas* para completar o seu registo e numa segunda fase, grande parte do grupo, estabelecia relações aditivas através de processos e modelos construídos.

Este relato refere-se ao trabalho, em sala de aula da tarefa – Vamos contar narizes, mãos e dedos – adaptada de Multiplicação e Divisão – ESE de Lisboa.

Tarefa: Vamos contar narizes, mãos e dedos.

A tarefa "Vamos contar narizes, mãos e dedos" foi elaborada em grupo de trabalho, e é a segunda de uma sequência de tarefas no âmbito do tópico Operações com Números Naturais.

Tema: Números e operações

Tópico: Operações com números naturais

Data de realização na aula:10 de Março de 2010

Escola: EBI de Santo Onofre

Professora: Maria Isabel Martins de Sousa

Principais conceitos matemáticos trabalhados na aula:

- Estimar somas e diferenças.

- Compreender a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório.

- Reconhecer situações envolvendo a divisão.

- Usar os sinais +, -, x e : na representação horizontal do cálculo

- Estimar somas, diferenças e produtos.

- Adicionar, subtrair e multiplicar utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito.

- Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação.

- Resolver problemas envolvendo adições, subtrações e multiplicações.

Capacidades transversais

Resolução de problemas

– Compreensão do problema

– Conceção, aplicação e justificação de estratégias

Raciocínio matemático

– Justificação

– Formulação e teste de conjeturas

Comunicação matemática

– Interpretação

– Representação

– Discussão

Ideias e procedimentos disponíveis e em desenvolvimento

Em relação ao número de narizes alguns alunos ainda poderão contar o número de alunos (ou fazer o desenho) e fazer a correspondência para o número de narizes. Outros alunos verificarão pelo conhecimento do número de alunos, 20, e se cada aluno tem um só nariz, então existirão 20 narizes.

No que diz respeito ao número de mãos, alguns alunos poderão desenhar os 20 alunos com duas mãos cada um, para depois contar as mãos uma a uma. Outros alunos poderiam efetuar saltos de dois em dois, para saber o número total de mãos (recorrendo a modelos como a reta numérica ou uma tabela).

Também será possível que utilizem resultados já conhecidos:

Se fossem 10 alunos teriam 20 mãos, porque 10 x 2 = 20;

Se fossem 20 alunos teriam 40 mãos, porque se 10 x 2 = 20, então 2 x 10 x 2 = 2 x 20 = 40;

No cálculo do número de todos dedos da mão direita, ou do número de todos os dedos das duas mãos, os alunos poderão seguir processos similares aos previstos para o cálculo do número de mãos. Uma outra estratégia de cálculo será aplicar o dobro para calcular o número de olhos em relação aos narizes, bem como o dobro de dedos das duas mãos em relação ao número de dedos de uma das mãos.

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Cálculo aditivo.

- Noção de multiplicação.

- Utilização de tabelas proporcionalidade.

- Construir as tabuadas do 2, 5 e 10.

- Relações entre tabuadas.

- Regularidades na multiplicação por 10.

Tarefa: Vamos contar narizes, mãos e dedos

<u>Rotinas</u>

2 x 8 =….4 x 8 =   (o dobro do dobro)

<u>Apresentação da tarefa</u>

A tarefa foi apresentada aos alunos num momento coletivo. Foi pedido aos alunos que mencionassem o número de alunos na turma. Não houve dúvidas ao afirmarem que eram 20 alunos. Foi distribuída então uma parte da ficha de trabalho. Um dos alunos leu o enunciado em voz alta. Solicitámos a um outro aluno que expusesse o trabalho na tarefa que iríamos iniciar.

“Primeiro vamos contar os narizes que há na nossa turma e depois contamos os olhos.” (aluno)

“Não esqueçam que essa contagem limita-se aos alunos da turma, as professoras não fazem parte do grupo de alunos. Chamo também a atenção para a escolha de estratégias de cálculo. Como já são crescidinhos poderão optar por estratégias rápidas mas capazes ou seja, pensem qual será a melhor estratégia para calcular o que vos é pedido?” (professora)

Antes dos alunos iniciarem a resolução discutiu-se possíveis estratégias de resolução

“M qual te parece a estratégia de cálculo para responderes à 1ª questão?” (professora)

“Não é preciso …somos 20 são 20.” (aluno)

“Porque é que são 20 narizes?” (professora)

“Não é preciso …somos 20 são 20.” (aluno)

“Porque somos 20 e temos 1 nariz cada um.” (aluno)

“Não te esqueças de fazer o registo e dares a tua resposta.” (professora)

“E para a segunda questão?” (professora)

“ Eu conto de dois em dois.” (aluno com acompanhamento em pedopsiquiatria)

“Eu não faço 2x20” (aluno)

“Porquê?” (professora)

“Não é preciso …somos 20 são 40” (aluno)

“Porque somos 20 e temos 2 olhos e não preciso de estar a contar de 2 em 2” (aluno)

….

Realização da tarefa

Os alunos resolveram individualmente cada uma das questões da tarefa, levando menos tempo que o previsto.

Calcula o total de dedos da mão direita de todos os alunos; E o total de dedos das duas mãos.

<u>Discussão</u>

Em grande grupo os alunos apresentaram os procedimentos de cálculo.

Para a primeira questão *Quantos são os narizes?* Não diversificaram as estratégias. Escreveram na grande maioria, que eram 20 narizes porque eram 20 alunos. Um outro grupo (Fig.1) fez o registo.

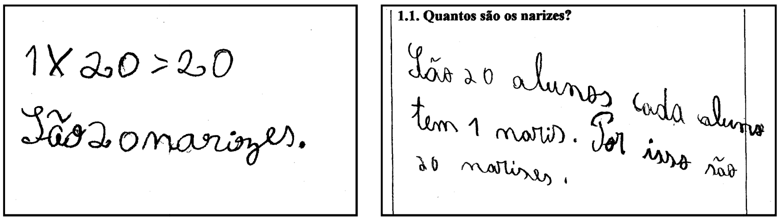


Fig.1

“ Porquê 1x20?” (professora)

“ Porque somos 20 alunos e temos um nariz.” (aluno)

“Parece-me que se eu traduzir o que acabaste de dizer para linguagem matemática, seria 20x1” (professora)

“É a mesma coisa 20x1 ou 1x20 dá 20 na mesma.” (aluno)

“Ainda que o produto seja o mesmo não representa o mesma contexto. Quando eu registo 1x20 estou a querer dizer que existe uma vez o 20, por exemplo existe 1 menino com 20 narizes, mas se eu registar 20 x1 eu posso querer dizer que existem 20 meninos com 1 nariz.” (professora)

È notória a ambivalência com que os alunos fazem este tipo de registo, para eles o que é realmente importante é o produto. Não foi caso único, já surgiram registos, em outras tarefas, cujas quantidades usadas na multiplicação não traduziam o contexto trabalhado, com rigor. Parece-me que se eles se apercebem rapidamente do produto, ou porque resolvem o problema através do cálculo mental, mas como se lhes pede um registo, utilizam de forma aleatória os fatores, desde que o produto corresponda ao pensado inicialmente.

…

Na segunda questão *Quantos são os olhos?* Também os registos não foram muito diferentes dos seguintes:

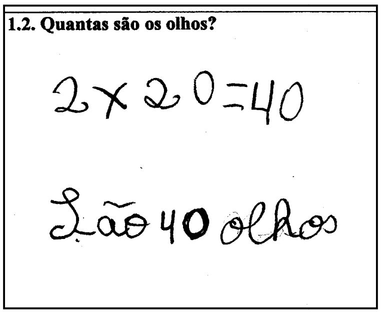


Fig.2 **Fig.3**

O L desenhou os olhos (Fig.2) efetuando uma contagem de dois em dois, contudo contou com apenas 19 alunos, "esqueci-me dos meus" disse o L.

Surgiu a mesma situação em relação ao registo do número de olhos, usando a multiplicação.

"Aqui também não está bem (Fig.3) assim são 2 vezes 20 olhos." (aluno)

" Eu também concordo contigo."(professora)

"Quem é que quer explicar melhor o que acabou de dizer a M?"

"Nós somos 20 e temos 2 olhos …pois é há 20 vezes 2 olhos…"(aluno DHDA)

Na questão 1.3 *Calcula o total de dedos só da mão direita de todos os alunos?*

Os alunos efetuaram o cálculo através da contagem por grupos de 5 (dedos de cada mão).

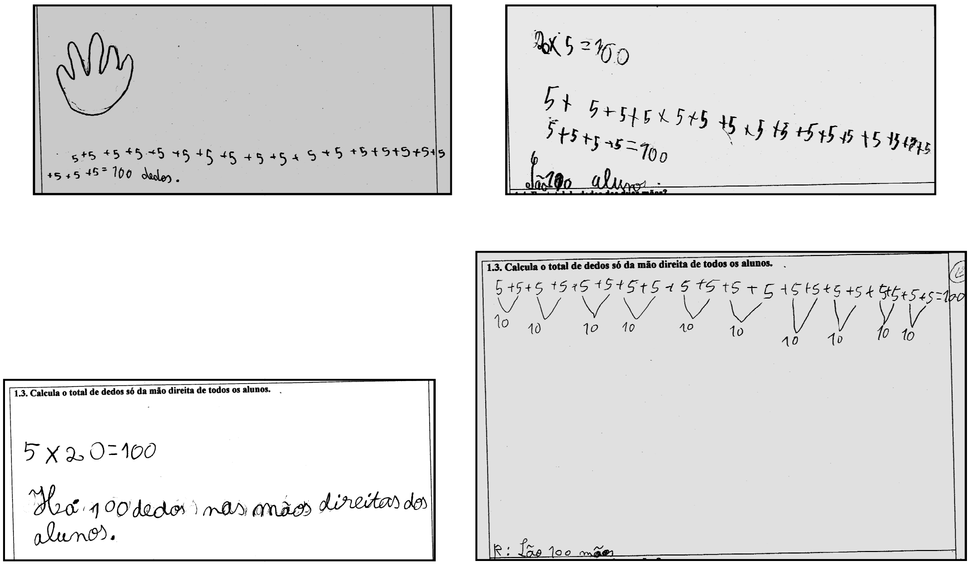


Fig.4 O mesmo erro de interpretação no registo (20x5=100)

Na última questão *E o total de dedos das duas mãos?*

Surgiram diferentes estratégias de cálculo, quase todas direcionadas para adições sucessivas de 10 dedos (fig.6) e, verificando que nas duas mãos existem o dobro de dedos.

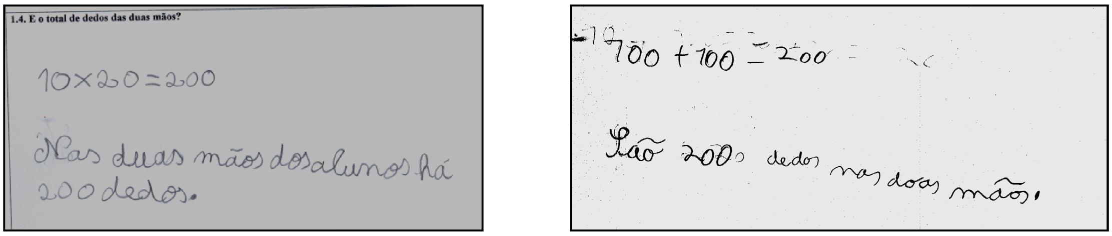
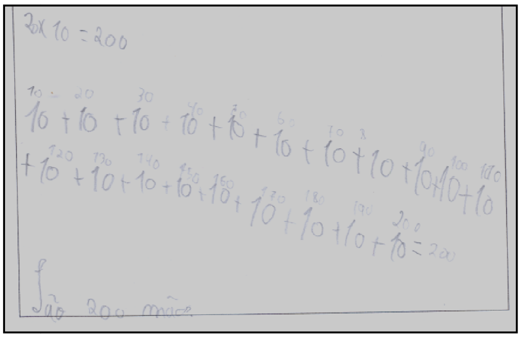
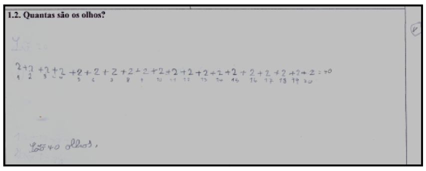


Fig.5 Novo erro de interpretação (20x10)





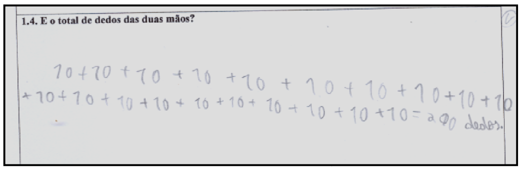
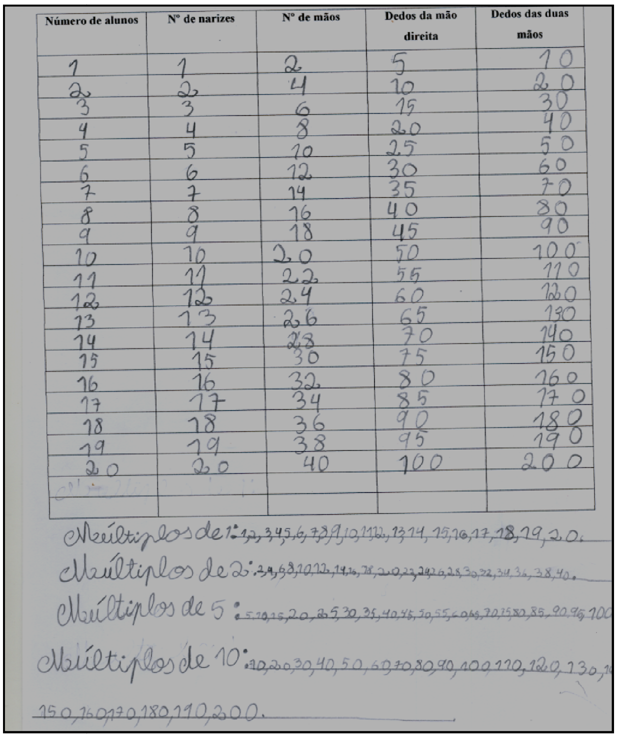


Fig.6

À medida que os alunos foram discutindo as estratégias apresentadas compreenderam que essas mesmas estratégias têm uma leitura. Tal como leem mensagens pela disposição organizada das letras também se pode ler matemática através da forma como dispõem os números.

Fig.7 Com os dados de que dispunham preencheram uma grelha.



Número de alunos	Nº de narizes	Nº de mãos	Dedos da mão direita	Dedos das duas mãos
1	1	2	5	10
2	2	4	10	20
3	3	6	15	30
4	4	8	20	40
5	5	10	25	50
6	6	12	30	60
7	7	14	35	70
8	8	16	40	80
9	9	18	45	90
10	10	20	50	100
11	11	22	55	110
12	12	24	60	120
13	13	26	65	130
14	14	28	70	140
15	15	30	75	150
16	16	32	80	160
17	17	34	85	170
18	18	36	90	180
19	19	38	95	190
20	20	40	100	200

Múltiplos de 1: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20.
Múltiplos de 2: 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40.
Múltiplos de 5: 5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100
Múltiplos de 10: 10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120,130,140,
150,160,170,180,190,200.

A exploração da grelha foi sem dúvida o momento mais rico da tarefa e daí a opção pelo relato da aula.

Comecei por desenhar a grelha no quadro e preencher só a primeira coluna, o número de alunos. Os elementos da segunda coluna, os alunos iam ditando os dados alternados, conforme a solicitação.

"Quantos narizes há em18 alunos?" (professora)

"18 é sempre o mesmo número dos alunos, a segunda coluna é igual à primeira." (aluno)

"È 18x1, assim já está bem não é?" (aluno)

"Porquê?" (professora)

"Porque há 18 meninos com um nariz." (aluno)

"Em todas as colunas há uma regularidade, na primeira e na segunda é sempre +1; na terceira coluna é +2; na quarta coluna é mais 5 e na última é sempre +10. (aluno)

"Muito bem, descobrindo as regularidades numa tabela facilita não só a compreensão da relação entre os números lá existentes como também entre os números e os cálculos efetuados." (professora)

Ao observar como preencheram cada um a sua grelha, percebi que eles foram adicionando o número inicial de cada coluna, sem relacionarem as quantidades registadas com o número de alunos.

Daí uma necessidade acrescida de explorar o registo alternadamente.

Ao passarmos para a coluna que pedia o número de mãos…

"Quantas mãos têm 12 alunos?" (professora)

"24" (aluno)

"Como pensaste?" (professora)

" 2x12 não… 12x2 que é 10 mãos +10 mãos +2 mãos +2 mãos e dá 24" (aluno)

“Se estás a pensar em 10 mãos +10 mãos +2 mãos +2 mãos, parece-me que o registo poderá ser outro?” (professora)

“ 12 meninos e duas mãos em cada menino.” (aluno)

“E 10 mãos +10 mãos +2 mãos +2 mãos…” (professora)

“ É 12 x 2, este cálculo é mais rápido.” (aluno)

Outros registos…

“Está bem 5 meninos x 2 mãos + 5 meninos x 2 mãos + 1 menino x 2 mãos. Já percebi o que queres dizer.” (professora)

O D registou no quadro 5x2+5x2+1x2=24.

“É sempre o dobro da coluna dos narizes porque temos o dobro de mãos.” (aluno)

Fomos preenchendo a coluna que dizia respeito ao número de mãos, nos alunos da turma adotando o mesmo procedimento, calculando o dobro do número de narizes ou do número de alunos.

“Quantos dedos da mão direita, têm 12 meninos?” (professora)

Na coluna que dizia respeito ao número de dedos da mão direita apenas estavam preenchidas as duas primeiras filas.

Os alunos ficaram a pensar, quando o H respondeu:

“É 60.”

As grelhas já não estavam com eles, pois esta exploração foi um segundo momento da tarefa. As tarefas *E se adicionarmos duas linhas na tabuada?* e *O João e as tabuadas* ainda não tinham sido trabalhadas, esta era a segunda tarefa desta sequencia de tarefas.

“Como pensaste H?” (professora)

“Então eu queria fazer 12x5 e eu fiz na cabeça 2x5 que é10 + 4x5 que é 20+2x5 que é 10 + 4x5 que é 20. 10+20+10+20 é 60. Porque 2x5+4x5+2x5 +4x5 é 12 x5”

Os colegas pareciam não compreender a estratégia do H. O silêncio na sala mostrava o quanto esta estratégia se lhes afigurava pouco confusa.

Dirigi-me ao quadro e tentei que os alunos compreendessem o raciocínio do H (Fig.8)

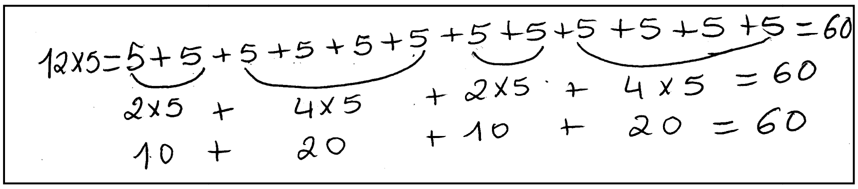


Fig.8

Tentei estabelecer a relação da adição sucessiva com a multiplicação.

"Já sei o H faz assim porque é mais fácil calcular, é uma boa estratégia." (aluno)

…

"18 meninos quantos dedos têm na mão direita? (professora)

"10 x 5+2 x5+4 x5+2 x5…vou fazer na folha…" (aluno DHDA)

"18 x 5 é 90" (M) "Fiz como o H e o D. (aluno DHDA), é muito mais fácil, 10 x 5 é 50+2 x 5 é 10 + 4 x 5 é 20 e 2 x 5 é 10 então 50 + 10 + 20 + 10 é 90 "(antecipando-se à resposta do D.)

…

"16 meninos quantos dedos têm na mão direita?"(professora)

"16 x 5 é 80, eu fiz menos 10 dedos que 18 mãos de 18 meninos." (aluno)

"Explica melhor." (professora)

"18 x 5 é 90 e 16 x 5 é 90 - 10 é 80" (aluno relembrando a estratégia apresentada pela aluna M e D)

…

"13 meninos quantos dedos têm na mão direita?" (professora)

“Eu sei é 13x5 que é 65, sabes porquê? Olha 50+15 é 65, não percebeste?” (aluno)

“Acho que sim mas explica melhor aos teus colegas.” (professora)

“13 é 10+3 e 10x5 é 50 e 3x5 é 15; 50+15 é 65” (aluno)

…

Os alunos iam fazendo comentários e respondiam ao que era pedido revelando que intuíam esta decomposição da tabuada da multiplicação. Aderiram entusiasmados pela descoberta.

Após completarmos a coluna que dizia respeito ao número de dedos da mão direita, passámos à última coluna. Dedos das duas mãos.

“9 meninos quantos dedos têm nas duas ,mãos C?” (professora)

…

“90 é 9x10 é 90” (aluno)

“Como fizeste o teu cálculo, recorreste à decomposição do 9 ou do 10?” (professora)

“É 9 dezenas que é 90” (aluno)

“Também se pode fazer de outra maneira, é o dobro da coluna do lado (dedos da mão direita)” (aluno)

…

Assim fui conduzindo a exploração do registo da tabela apelando à interpretação do registo matemático, qual o significado dos úmeros utilizados, valorizei as descobertas procurando que as aplicassem noutras questões de forma a aferir a funcionalidade dessas mesmas descobertas. Um aspeto muito importante foi a preocupação em focar os alunos na estrutura das expressões numéricas escritas e não apenas nos resultados (caso da resposta das questões na ficha de trabalho).

Os alunos confirmaram a descoberta do H e queriam também apresentar resultados, utilizando o mesmo procedimento, foi um momento em que a turma “esteve presente”, e compreenderam uma outra ferramenta matemática que poderão utilizar futuramente noutras situações de cálculo.

Tarefa: Caixas de fruta

Tema: Números e operações

Tópico: Operações com números naturais

Ano de escolaridade: 2º ano

Data de realização da tarefa: 25 de Novembro de 200

Escola: EBI de Santo Onofre

Professora: Maria Isabel Martins de Sousa

Ideias e procedimentos disponíveis e em desenvolvimento

- Reconhecer situações de multiplicação a partir de parcelas iguais

- Desenvolvimento do cálculo por estruturação.

- Reconhecer situações de multiplicação a partir da adição de parcelas iguais.

- Reconhecer situações de multiplicação partindo da disposição retangular de objetos.

- Reconhecer propriedades/relações das tabuadas de multiplicação por 2 e por 4.

Capacidades transversais salientes na aula:

Resolução de problemas

– Compreensão do problema

– Conceção, aplicação e justificação de estratégias

Raciocínio matemático

– Justificação

– Formulação e teste de conjeturas

Comunicação matemática

– Interpretação

– Representação

Tarefa

Rotinas: Número do dia

“6 contei 3+3.” (aluno)

” 6 contei 2x3 maçãs.” (aluno défice cognitivo e dislexia)

“Que relação terá a resposta do P e da V.” (aluno défice cognitivo e dislexia)?

“3+3 é duas vezes o três.” (aluno)

“P e V. (défice cognitivo e dislexia) concordam?” (professora)

-“Sim…” (aluno)

“Quer dizer que eu também posso “ler frases matemáticas”, as expressões ou seja os vossos registos (horizontais). Observo uma determinada quantidade e com os olhinhos faço um *movimento* (Fig.1) e rapidamente concluo qual a quantidade. Parece-me que foi assim que estes meninos pensaram?” (professora)

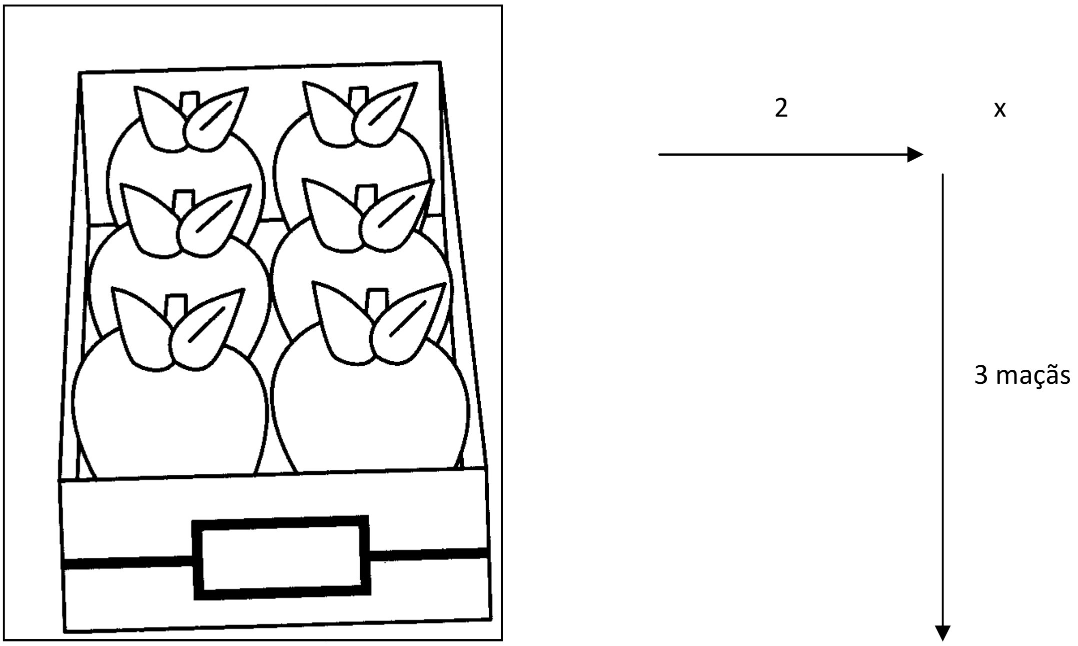


Fig.1

“Posso contar as maçãs que cada coluna tem e adicionar esse número tantas vezes como o número de filas. Mas atenção só posso fazer desta maneira se todas as filas ou todas colunas tiverem o mesmo número. Nós já tivemos oportunidade de verificar que quando a quantidade se repete nós contamos o número de vezes que isso acontece.” (professora)

(colocou-se uma caixa ao lado da outra para visualizarem melhor as colunas e as filas de maçãs).

“Também podemos fazer outros *movimentos* (Fig.2) e leio sempre 6.” (aluno).

(dirige-se à gravura e vai apontando com os dedos) é sempre 2x3 ou 3x2 é sempre 6.

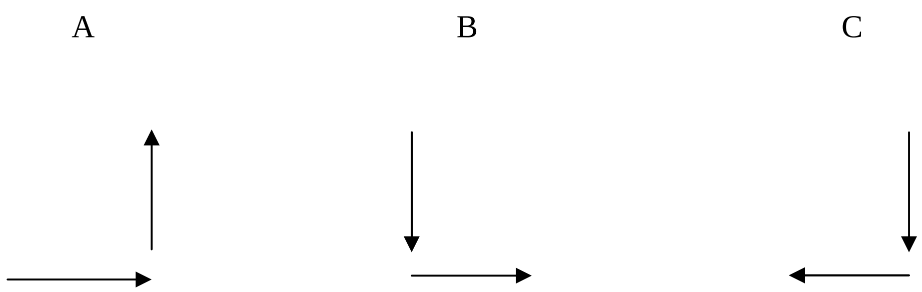


Fig.2

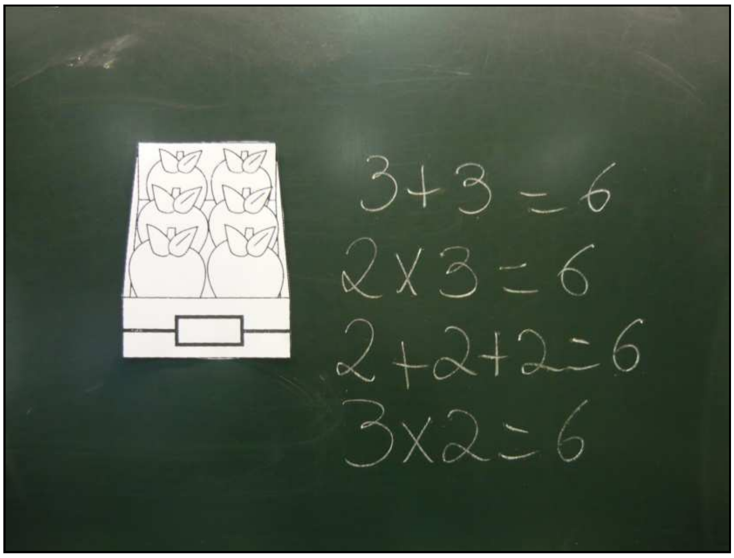


Fig.3

"A V (aluno défice cognitivo e dislexia) e o P *leram* de que forma?" (professora)

" A primeira ou a **A."** (Fig.2) (aluno défice cognitivo e dislexia)

"Como ficaria a expressão matemática se eu lesse como mostra o movimento **B**?" (professora)

"3x2, três maçãs vezes duas colunas ou 3+3." (aluno)

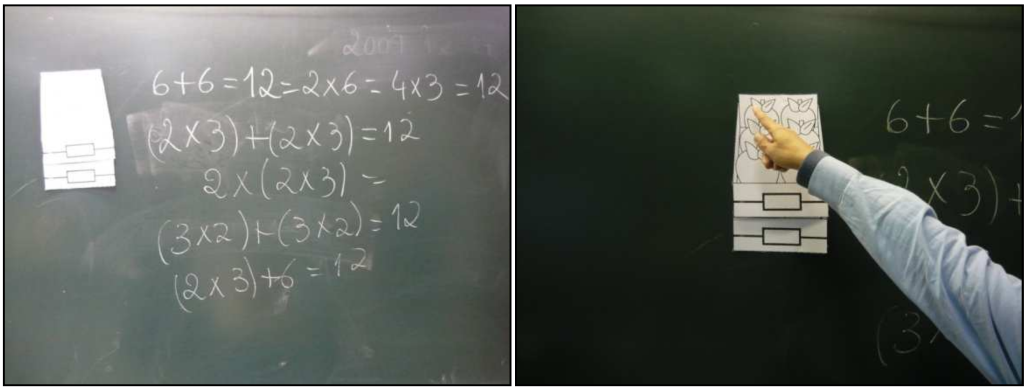


Fig.4 Apresenta-se no quadro duas caixas de maçãs.

Surge imediatamente 6+6 = 12.

"Duas caixas de 6 maçãs é 2x6 = 12" (aluno com acompanhamento em pedopsiquiatria)

"Recordem os registos feitos das maçãs de uma caixa, agora em relação a duas caixas com o mesmo número de maçãs…" (professora)

"É 8+4." (aluno com acompanhamento em pedopsiquiatria)

"Porquê 8+4?" (professora)

"Porque dá 12." (aluno com acompanhamento em pedopsiquiatria)

"Eu gostaria que tu *lesses* a quantidade, ou diz-me as maçãs que observas…" (professora)

"Eu vejo 3+3 em cima e 3+3 em baixo que são 12" (aluno com acompanhamento em pedopsiquiatria):

"É duas vezes o 3+3" (aluno)

"Que poderemos representar 2x (3+3) = 12, colocando dentro do parêntesis a quantidade de uma caixa, como se fosse um saquinho como tu disseste mas agora é uma caixa." (professora)

O D pede para mostrar uma "coisa" no quadro. Levantando a segunda caixa explica…

"A caixa em baixo tem (2x3) + (2x3) em cima. Isto tudo é o dobro de 6 da primeira caixa."

"E uma caixa é metade de 12, porque 6 é metade de12" (aluno)

"Então vamos organizar estes registos tão importantes." (professora)

(2x3) + (2x3) =12 ou o dobro de (2x3) é 12 ou 2x (2x3) = 12

"Para uma caixa também poderíamos ter dito 1x (3x2) = 6 e este registo é só de uma caixa que é 6 metade de12 e 1 é metade de 2" (aluno)

" Explica melhor H." (professora)

" Numa caixa posso representar as maçãs 1x (2x3) = 6; se forem duas caixas o dobro de 1 é 2 então faço 2x (2x3) = 2x6 = 12"

(O H registou assim a sua forma de pensar, no quadro)

“ Podemos fazer estes registos e colocar no lugar de 2x3 o 3x2” (aluno)

“ A Maria tem razão?” (professora)

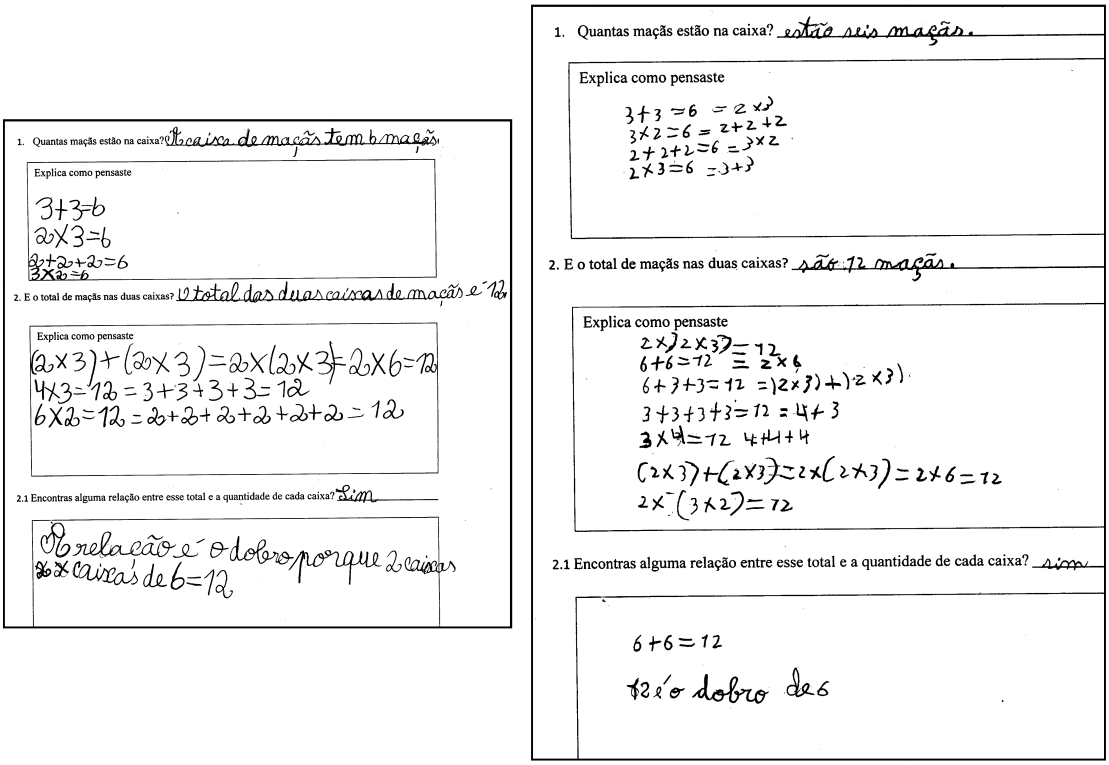
“Sim 2x3 é o mesmo que 3x2, depende como *leio* assim ou assim.” (Fig.2) (aluna com défice cognitivo e dislexia)

Fizeram-se novos registos no quadro alterando apenas 2x3 por 3x2 (Fig.3) para poderem compreender que se referiam à mesma quantidade

2x3 = 3+3 =6 2x (2x3) = 2x6 = 12

3x2 = 2+2+2 = 6 2x (3x2) = 2x 6 = 12

Procedeu-se à exposição dos registos individuais, da ficha de trabalho. Surgiram alguns novos (Fig.4) que foram escritos no quadro.


1. Quantas maçãs estão na caixa? A caixa de maçãs tem 6 maçãs.

Explica como pensaste

3+3=6
2x3=6
2+2+2=6
3x2=6

2. E o total de maçãs nas duas caixas? O total das duas caixas de maçãs é 12.

Explica como pensaste

(2x3)+(2x3)=2x(2x3)=2x6=12
4x3=12=3+3+3+3=12
6x2=12=2+2+2+2+2+2=12

2.1 Encontras alguma relação entre esse total e a quantidade de cada caixa? Sim

A relação é o dobro porque 2 caixas
~~2x~~ caixas de 6=12

1. Quantas maçãs estão na caixa? estão seis maçãs.

Explica como pensaste

3+3 =6 = 2x3
3x2 =6 = 2+2+2
2+2+2=6 = 3x2
2x3=6 = 3+3

2. E o total de maçãs nas duas caixas? são 12 maçãs.

Explica como pensaste

2x(2x3)= 12
6+6=12 = 2x6
6+3+3= 12 = (2x3)+(2x3)
3+3+3+3= 12 = 4+3
3x4=12 4+4+4
(2x3)+(2x3)=2x(2x3)=2x6=12
2x(3x2)=12

2.1 Encontras alguma relação entre esse total e a quantidade de cada caixa? sim

6+6=12
12 é o dobro de 6

Fig.5

(2x3) + 6 = 6 + 6 = 12 (H) 4 x 3 = 12 ou 4 colunas de 3 maçãs (asperger)

Apresenta-se no quadro uma gravura com uma caixa de peras.

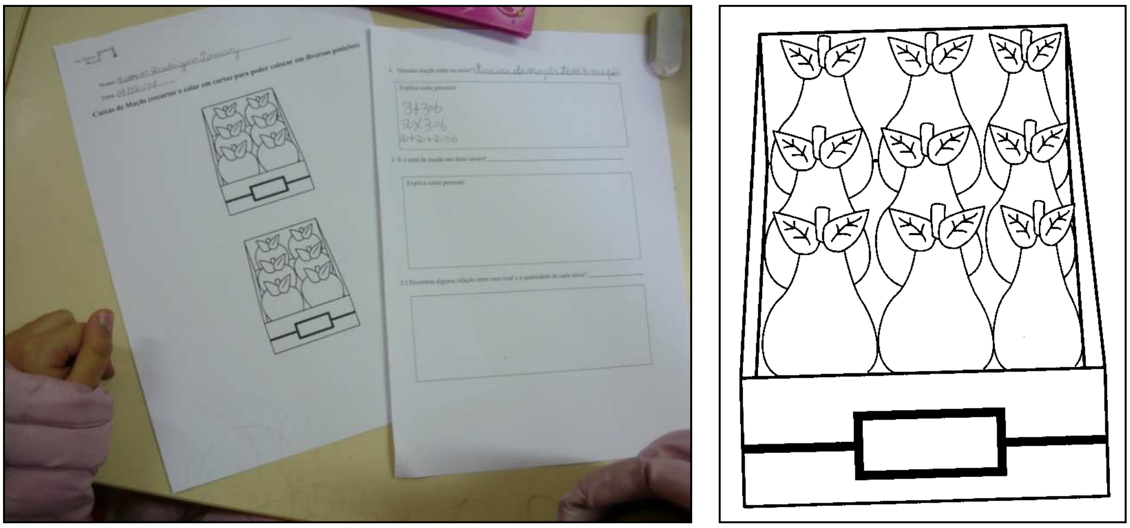
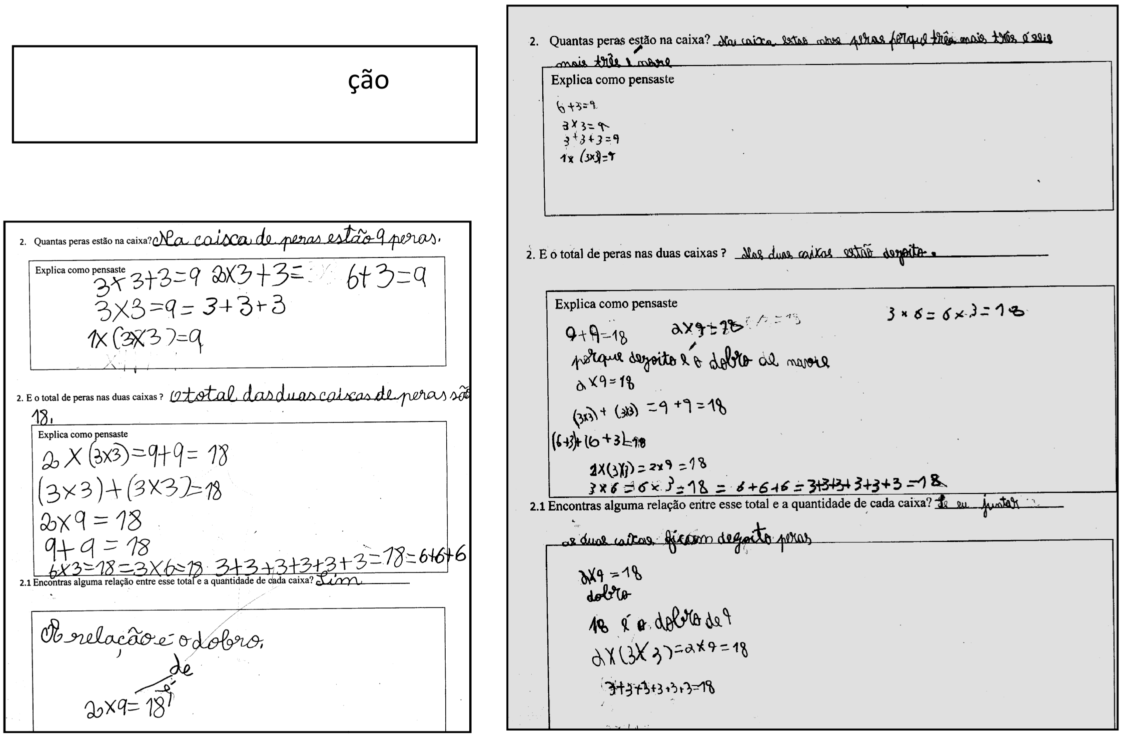


Fig.6

Apresentou-se a(s) caixa(s) de peras. Pediu-se aos alunos que registassem na ficha de trabalho a quantidade observada numa caixa e depois nas duas caixas. Pediu-se também que registassem sempre a forma como pensaram


ção

2. Quantas peras estão na caixa? Na caixa de peras estão 9 peras.

Explica como pensaste

3+3+3=9 2X3+3= 6+3=9

3X3=9= 3+3+3

1X(3X3)=9

2. E o total de peras nas duas caixas? O total das duas caixas de peras são 18.

Explica como pensaste

2X(3X3)=9+9= 18

(3x3)+(3X3)=18

2X9 = 18

9+9 = 18

6X3=18=3X6=18 3+3+3+3+3+3=18=6+6+6

2.1 Encontras alguma relação entre esse total e a quantidade de cada caixa? Sim.

A relação é o dobro de

2X9= 18

2. Quantas peras estão na caixa? Na caixa estão nove peras porque três mais três é seis mais três é nove

Explica como pensaste

6+3=9

3X3=9

3+3+3=9

1x(3x3)=9

2. E o total de peras nas duas caixas? Nas duas caixas estão dezoito.

Explica como pensaste

9+9=18 2x9=18 3x6=6x3=18

porque dezoito é o dobro de nove

2X9=18

(3x3)+(3x3)=9+9=18

(6+3)+(6+3)=18

2X(3X3)=2x9=18

3x6=6x3=18 = 6+6+6=3+3+3+3+3+3=18

2.1 Encontras alguma relação entre esse total e a quantidade de cada caixa? Se eu juntar as duas caixas ficam dezoito peras

2X9=18

dobro

18 é o dobro de 9

2X(3X3)=2X9=18

3+3+3+3+3+3=18

Fig.7

As estratégias de cálculo apresentadas nas fichas de trabalho (Fig.7) foram apresentadas à turma.

"Agora é fácil é contarmos as peras nas filas e nas colunas e depois já sabemos que era 9 na primeira caixa e depois é sempre o dobro nos registos." (aluno)

A sistematização destas e de outras respostas no quadro, não foi possível apresentá-las em fotografia ou digitalização, devido à envolvência da aula, contudo favoreceu o aparecimento de outras relações. (Fig.4)
Esta aula terminou sem explorarmos a(s) caixa(s) de pêssegos, ficando assim para a aula seguinte.
A aula correu bem, trabalharam novamente o conceito de dobro e metade, compreenderam a multiplicação no sentido aditivo, intuíram a propriedade comutativa e distributiva da multiplicação e apreenderam uma outra estratégia de cálculo, utilizando o modelo estrutura retangular.

Tarefa: Cem ovos[33]

Tema: Números e operações

Tópico: Operações com números naturais

Data de realização na aula: 22 de Março de 2010

Escola: EBI de Santo Onofre

Ano de escolaridade: 2º Ano

Professora: Maria Isabel Martins de Sousa

Principais conceitos matemáticos trabalhados na aula:

- Domínio do cálculo aditivo.

- Noções de dobro e de metade.

---

[33] *Desenvolvendo o Sentido do Número Perspectivas e exigências curriculares – Materiais para o professor de 1º Ciclo*, (Equipa do Projecto *Desenvolvendo o Sentido do Número: perspectivas e exigências curriculares,* 2007)

- Representação da linha numérica dupla.

- Construção das tabuadas do 6 e do 12.

Capacidades transversais

Resolução de problemas

– Compreensão do problema

– Conceção, aplicação e justificação de estratégias

Raciocínio matemático

– Justificação

– Formulação e teste de conjeturas

Comunicação matemática

– Interpretação

– Representação

– Discussão

Tarefa

Mais uma vez, preparava-se uma tarefa onde se previa que os alunos aplicassem as relações de dobro e de metade, bem como as relações entre algumas tabuadas, já trabalhadas na tarefa *O João e as tabuadas*, na mesma trajetória de aprendizagem. Previa-se a utilização do modelo da reta dupla, desenvolvendo o sentido da multiplicação, a multiplicação associada a adições sucessivas e num nível mais estruturado à ideia de múltiplo. Os procedimentos resultaram da interpretação do problema auxiliada pelos conhecimentos informais construídos no dia a dia, dos modelos matemáticos utilizados e trabalhados em estratégias de resolução, linear, linha numérica, estrutura retangular, tabela, … Um outro objetivo da tarefa era desenvolver o sentido aditivo da multiplicação, fazendo uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A tarefa *Cem ovos*, fazia parte de uma sequência de tarefas onde se perspetivava a aplicação do conhecimento e da destreza dos números e as operações em situações de cálculo (McIntosh, 1991).

Descrição da Tarefa

<u>Rotinas</u>

Apresentação do cálculo 8 x 22; durante 15 segundos no quadro, registam a estimativa do produto. Apresentam a estratégia utilizada, e o produto aproximado.

<u>Apresentação da tarefa</u>

Apresenta-se o problema:

Ontem no hipermercado estava uma caixa num dos corredores com ovos. Tinha um grande rótulo onde se lia "Cem ovos". Duas empregadas junto da caixa apressavam-se a embalar os ovos em caixas de 6. Quantas caixas teriam de utilizar?

<u>Realização da tarefa/ Discussão</u>

Regista-se no quadro as seguintes hipóteses:

A pelo menos 5 caixas

B pelo menos 10 caixas

C pelo menos 15 caixas

"100 ovos! Acham que é uma grande quantidade?" (professora)

Os alunos entreolham-se.

“São muitos ovos…” (aluno)

“10 ovos mais 10 ovos mais 10 ovos…” (aluno Perturbação de autismo)

“100 ovos são 10 ovos dez vezes.” (aluno)

Os alunos iam definindo a quantidade de ovos: 100.

“ Quantas caixas de 6 ovos é que serão precisas, aproximadamente? Qual é a vossa estimativa?” (professora)

“Qual das três hipóteses **A**, **B** e **C** vos parece mais próxima à quantidade de caixas necessárias para embalar os 100 ovos?” (professora)

“10 não dá e 5 muito menos.” (aluno)

“Concordas com a opinião do …?” (professora)

Um aluno pensava em voz alta:

“Eu acho que sim 6+6 é 12, 12+6 é 18, 18 +6 é 24, 24+6 é 30, 30+6…” (aluno)

“Então podemos concluir que…” (professora)

“5 caixas não chegam o P já passou de 5.” (aluno com DHDA)

Um outro, rabiscava numa folha à medida que ia expondo o seu raciocínio:

“10 caixas também não (4x6)+(4x6)+(2x6) = 24+ 24 +12 = 60 … 4x6 sei que é o dobro do dobro de 6.” (aluno)

“Os teus colegas compreenderão melhor se fizeres o registo no quadro.” (professora)

O aluno registou no quadro:

(4 x 6) + (4 x 6) + (2 x 6) = 24 + 24 +12 = 60

“10 caixas não chegam…“ (aluno)

“Serão 20 caixas?” (professora)

“Não porque não há 60+60 ovos…” (aluno)

“Metade de 100 é 50 que fica perto de 60…” (aluno)

“Continua o teu raciocínio…” (professora)

“Pois é mais que 10 e menos de 20.” (aluno)

“Explica melhor para os teus colegas compreenderem.” (professora)

“O J fez o registo no quadro e vimos que 10 caixas embalavam 60 ovos e se quiser pôr em mais 10 caixas não tenho 120 ovos que era o que levariam 20 caixas.”

Registou-se no quadro a tabela (Fig.1) preenchida com o contributo da turma:

1 caixa de 6 ovos leva 6 ovos, não chega para embalar 100.

2 caixas (o dobro) de 6 ovos leva 12 ovos (o dobro), não chega para embalar 100.

5 caixas de 6 ovos (referência ao 10 e 5 como metade de 10) leva 25 ovos (5 x 10 = 50; 50 – ½ x 50 = 25), não chega para embalar 100.

10 caixas de 6 ovos (6 x 10 ou 6 dezenas) leva 60 ovos, não chega para embalar 100.

20 (dobro de 10) caixas de 6 ovos leva 120 ovos (2 x 60), não chega para embalar 100.

1x6	6	Não chegam
2x6	12	Não chegam
5x6	30	Não chegam
10x6	60	Não chegam
20x60	60 e 60	Mais que 100!

Fig.1

Conclusão: São precisas mais que 10 caixas, mas menos que 20!

Organizaram-se os alunos para trabalho a pares e distribuiu-se por cada aluno um folha de registo da estratégia a utilizar.

Com base na tabela representada no quadro pediu-se aos alunos que, a pares, determinassem o número aproximado de embalagens de 6 ovos necessárias para embalar os 100 ovos.

Durante algum tempo, os alunos foram conversando com os pares. Em simultâneo registavam formas de pensar, outros retificavam registos iniciais.

“Quantas caixas irão precisar as senhoras para embalar os ovos?” (professora)

Os pares iam expondo à turma as suas conclusões, com base nos seus registos:

“20x6 é mais que 100 ovos mas tem que ser mais que 10 caixas, 11 caixas são 66 e é sempre + 6” (aluno)

“Observando a tabela haverá dados que nos poderão ajudar a chegar ao número de caixas necessárias?” (professora)

“60+30 são 90 ovos estou perto do 100 faltam 10 ovos” (aluno)

“10 ovos é mais uma caixa e sobram 4” (aluno)

“Contei as caixas porque contei as vezes que tinha o seis ”(aluno dislexia) - Fig.2

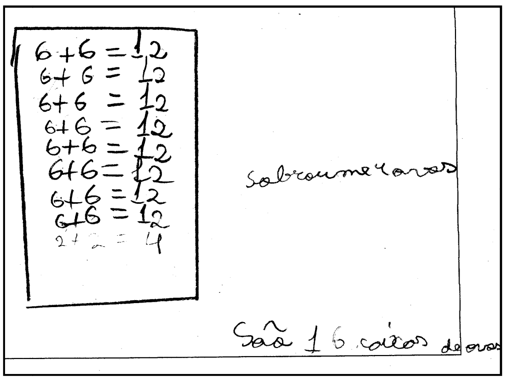


Fig. 2

“Mas como sabes que estão embalados 100 ovos?” (professora)

"E sobrou 4 eu contei os "dezes" eram 8 então são 80 ovos e depois contei os 2 e era 16 então é 96…eu pus lá 96+4" (aluno)

"Contaste as dezenas e adicionaste-as às unidades?" (professora)

"Sim e deu-me 96 e sei que só falta 4 para o 100" (aluno)

O par com a aluna (asperger) apresentava a sua estratégia, ainda que um pouco confusa:

"Pois…10caixas são 60 ovos e 30 ovos em 5 caixas e falta para mais 6 ovos e ainda sobram 4 ovos são 16 caixas." (aluno Asperger)

o cálculo do
vos, a tabela
adro. (aluno

12
24
48
60
72
96

"17 caixas se pusermos os ovos todos e a última fica com duas *pocinhas* vazias?" (aluno)

(…)

Propõe-se em seguida, a mesma exploração mas num outro contexto, caixas de 12.

“ E se as senhoras quisessem embalar os ovos em caixas de 12?” (professora)

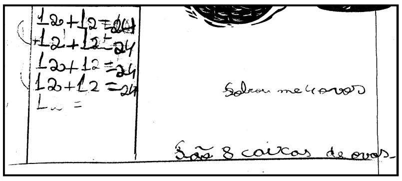


Fig. 4

“É mais depressa andar de 12 em 12 (Fig.4) Não são precisas tantas caixas?” (aluno)

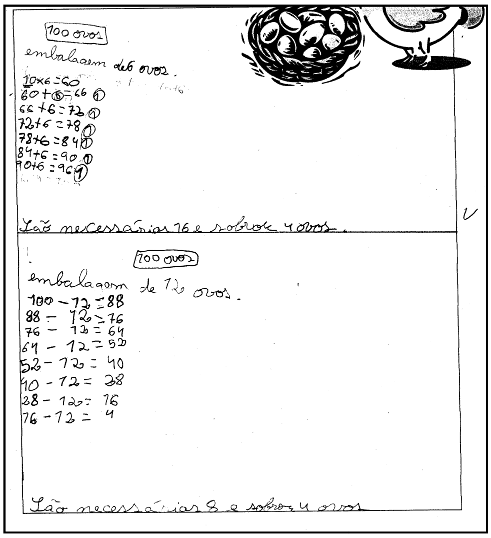
“Concordam com o D.? Precisamos menos caixas, que na situação anterior, quando embalámos os ovos em caixas de 6?” (professora)

“São mais ovos numa caixa, não são precisas tantas caixas?” (aluno)

“Serão necessárias 10 caixas? (professora, apelando implicitamente ao cálculo tendo como referência o 10)

“Podem testar as vossas conjeturas, a E diz que sendo caixas de 12 ovos, não serão necessárias tantas caixas. É verdade?” (professora)

Os alunos foram testando a conjetura e apresentando à turma as suas estratégias de resolução:



ınhamento em
zou a adição
número de

ımbalagens de
te do total de
ınte grupos de
ıubtração uma
ıvos, usando
ıbos os casos
sobram não
na caixa.

Fig. 5

(Aluno com défice de atenção grave)

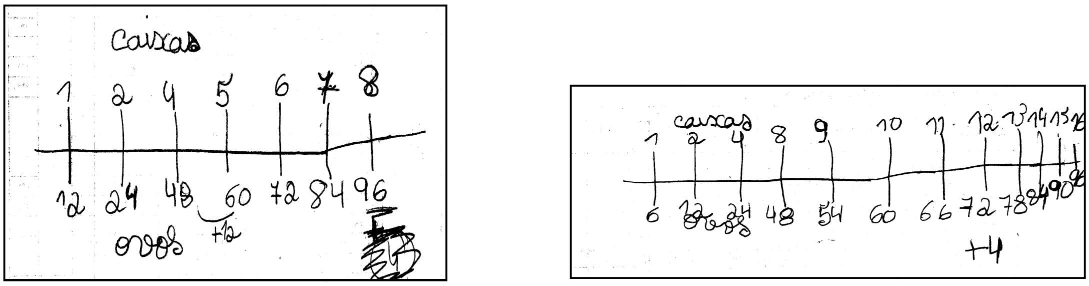
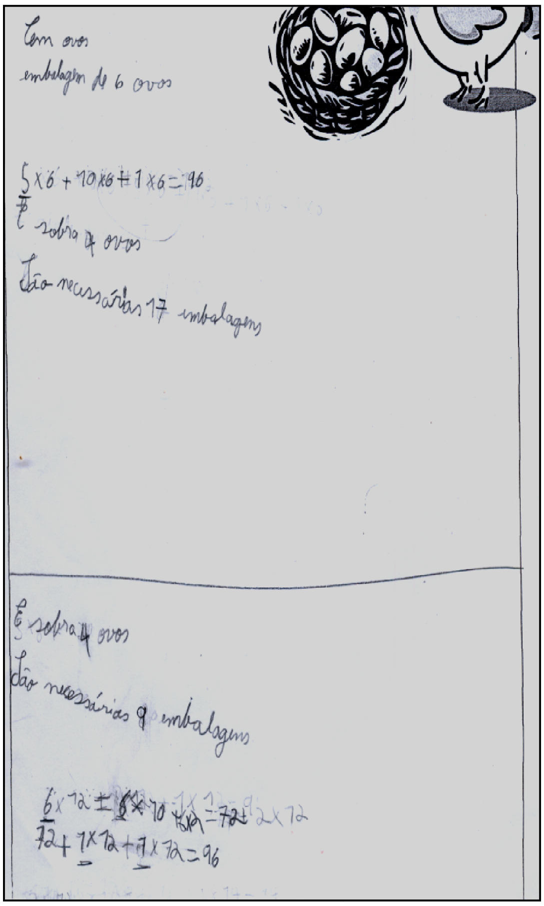


Fig. 6

Os seguintes procedimentos (fig. 6) revelam o modelo da linha dupla numa estrutura adequada para multiplicar, usando os dobros até às 8 caixas, não contabilizando, em ambos os casos uma caixa para os 4 ovos.



ı utilizou um
ıodelo linear
ĸplícito da

Fig.7

“Calcular a quantidade de caixas com 12 ovos é fácil porque já sei com 6, 12 é o dobro de 6 então só preciso de metade.” (aluno)

De imediato um aluno intervém:

"Metade de 17 não é 9." (aluno)

"Pois 16 caixas cheias e 4 noutra, então é 8 que é metade de 16 mais uma para os que sobram." (aluno)

"Quantos sobram?" (professora)

"Sobram outra vez 4 ovos, por isso são precisas 9 caixas para pôr os que sobram." (aluno)

Usou como referência o 10 x 6 = 60. (Fig. 8)

Aos 60 ovos adicionou 5 x 6 (30).

Aos 90 adicionou 1 caixa de 6 num total de 96 ovos.

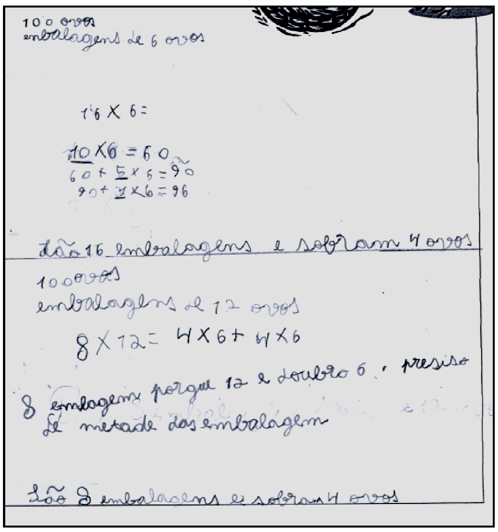


Fig.8

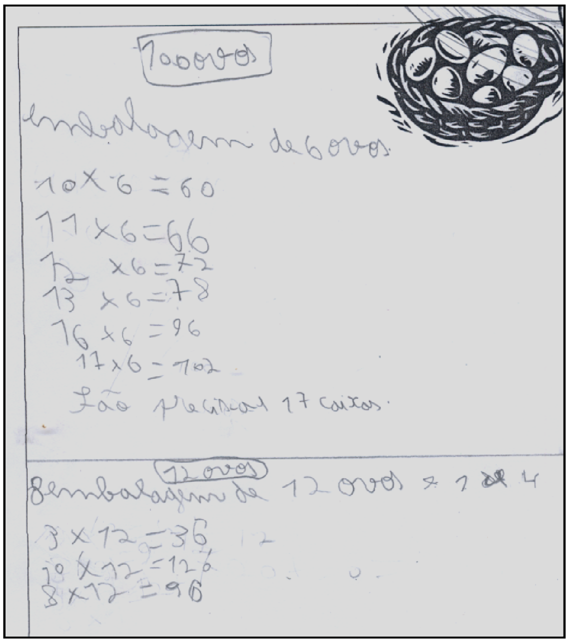


Fig.9

Para uma embalagem de 12 ovos o aluno (fig.8) compreendeu que seria necessário metade das caixas, e efetuou o cálculo, através da decomposição do fator 8.

(Aluno com défice de atenção com acompanhamento psicológico) usou também como referência o 10 x 6 = 60 (Fig. 9) continuando em tabuada não até ao produto pré estabelecido: 100, mas 102. Contabilizou mais uma caixa para os 4 ovos ainda que calculasse a caixa completa. Usou o fator 10 e verificou que passava de 100 ovos e passou para a hipótese de 8 caixas, ao invés de 9…

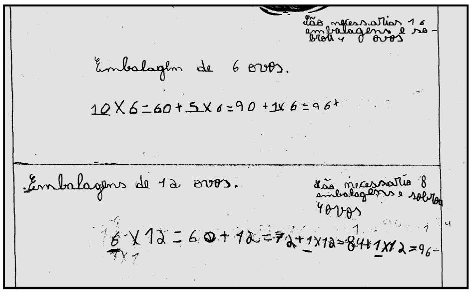


Fig. 10

Um outro exemplo da referência 10 como fator (Fig.10) facilitador de cálculo. (Aluno com défice de atenção com acompanhamento psicológico)

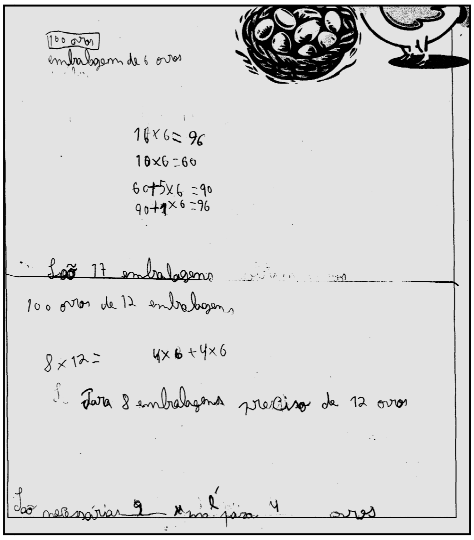


Fig. 11

Este aluno utiliza como procedimento a multiplicação, (Fig. 11) decompondo ambos os fatores recorrendo a relações e factos conhecidos.

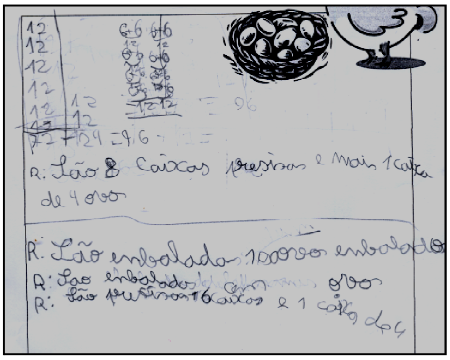


Fig. 12

Registo do aluno com perturbação de autismo (Fig. 12).

Há evidência de ter chegado à resposta, ainda que num registo desorganizado. Usou a quantidade 6 como a metade de 12 (6+6) como facilitador de contagem do número de caixas.

<u>Discussão/ Sistematização</u>

No final, estabeleceu-se, em grande grupo, a relação entre o dobro e a metade na estruturação da multiplicação. Para melhor compreender esta relação a partir do caso concreto das caixas de 6 e 12 ovos, organizou-se um esquema com um grupo de 48 e a sua decomposição em diferentes fatores, recorrendo a relações e factos conhecidos dos alunos.

Registou-se no quadro **12 x 6 = 72.**

De seguida colocou-se outro cálculo, perspetivando que os alunos, em grande grupo (turma) efetuassem os cálculos em cadeia, mentalmente, recorrendo à relação entre os fatores:

6 x 6 =

“É metade de 72, porque um dos fatores passou para metade e o outro está igual, é 36” (aluno)

“Qual foi o teu raciocínio?” (professora)

“ 72 = 30 + 30 + 12 é metade é 30 + 6” (aluno)

6 x 12 =

“É igual ao 12 x 6 que é 72, só trocaste a ordem das parcelas.” (aluno)

“É igual ao 12 x 6 que é 72, pois só trocámos a ordem dos fatores.” (professora)

24 x 6 =

“ É o dobro de 12 x 6, porque 24 é o dobro de 12, e o 6 ficou na mesma, é 144 porque 2 x 70 é 140 + 2 x 2 é 4” (aluno)

12 x 3 =

“É metade de 12 x 6 porque o 3 é metade do 6 e o resto dos números estão na mesma, é 66 (3 x 10) + (3 x 2)” (aluno)

24 x 3 =

A resposta não surgiu de imediato como até aqui.

“O que aconteceu a cada um dos fatores?” (professora)

“É o dobro porque 24 é o dobro de 12 e o 3 fica igual, é 60 + 12 é 72” (aluno)

“ 24 x 3 dá 72 como o primeiro cálculo 12 x 6” (aluno)

“Consegues explicar porquê?” (professora)

Cautelosamente o aluno tentava explicar:

“24 é o dobro de 12 e 3 é metade de 6, passa *um* para o dobro e *outro* para a metade…” (aluno)

Um outro apressa-se a responder:

“ É por isso que dá o mesmo porque *um* passou para a metade e o outro fator para o dobro. Tal como nós fazíamos naquela tarefa com os sacos das compras, ponho o dobro do peso num saco e metade no outro e o peso que levo é o mesmo, igual.” (aluno)

(…)

“Podemos generalizar? Será que se aplica a outros exemplos?” (professora)

Foram registados no quadro outros cálculos em cadeia, tendo como objetivo a relação entre os números dos fatores:

16 x6=96

8 x 12=96

Quando um fator passa para metade o outro passa para o dobro, o produto não se altera

Os alunos foram propondo outros cálculos e mentalmente calculavam o produto raciocinando em voz alta. Em simultâneo os alunos escreviam:

4 x 24 = 96

2 x 48 = 96 : Um dos fatores passou para a metade, o outro para o dobro, o produto não se altera.

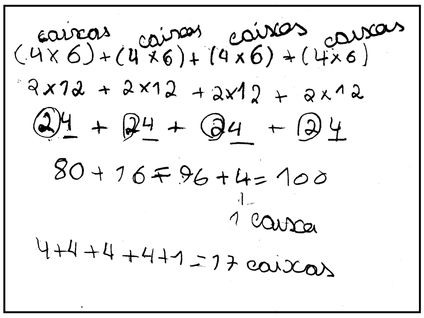
8 x 12 = 96 : Um dos fatores passou para o dobro, o outro para metade, o produto não se altera.

8 x 24 = 90 + 90 +16 =196 : Um dos fatores passou para o dobro, o outro manteve-se. O produto passa para o dobro (2 x 96)

4 x 12 = 2 x (2 x 12) = 24 + 24 = 48 : Um dos fatores manteve-se e o outro fator passou para metade. O produto passa para metade (1/2 x 96)

Nem todos os pares revelaram o mesmo nível de autonomia ou de realização. Ainda que todos os pares tivessem concluído a tarefa, foi notório o apoio prestado por alguns colegas ao seu par depois de avançarem com uma conjetura que se propunham testar.

Os alunos trabalharam a pares mas os seus registos além de serem individuais refletiram, por vezes, níveis de aprendizagem diferentes e por conseguinte também diferentes nos procedimentos, ou seja conversam mas o verificar conjeturas cada um opta pela estratégia que sente “como sua”, usando modelos ou representações das suas estratégias que vão evoluindo de forma gradual, traduzindo uma maior familiarização com o número e as relações entre números, numa comunicação, quer oral quer escrita, mais convicta e mais matemática (Fig. 13)



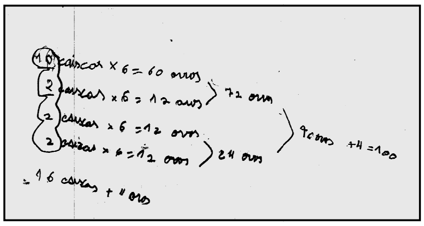
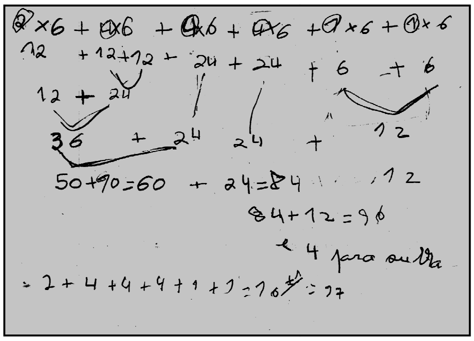


Fig. 13



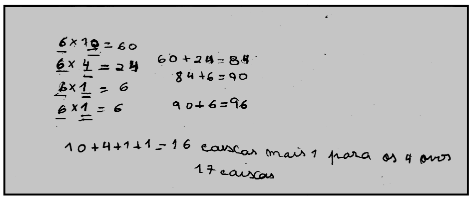


Fig. 14

Nesta tarefa *Cem ovos*, partimos de uma situação informal, embalagem que lhes é familiar para desenvolver o conceito de multiplicação.

Foram observados procedimentos de cálculo diferentes mas que refletem a ideia que cada um tem da multiplicação e a memorização de algumas tabuadas (2 , 4, 5 e 10, associadas ao dobro, dobro do dobro, do 10 e do 5, metade do 10 e agora à do 6 e 12, dobro de 6).

Verificámos que há alunos que a ideia de multiplicar está muito associada à **adição repetida** de uma mesma quantidade e outros alunos associam à ideia de multiplicar à **ideia de múltiplo**. Assim, os procedimentos de cálculo divergem revelando diferentes níveis de raciocínio multiplicativo: **multiplicação no sentido aditivo** (Fig.2, 4, 5 e 12); uso explícito da multiplicação e neste sentido surge com frequência o **modelo linear associado à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição** (Fig.7 e 13); uso da multiplicação **recorrendo a produtos conhecidos** (Fig.6, 8, 10 e 13); usar a

relação dobro/metade (fig.3, 6 e 11) e situações multiplicativas resolvidas em **tabela** ou **linha numérica dupla,** estando presente o sentido proporcional da multiplicação (Fig. 3 e 6).

A tarefa também ajudou a trabalhar a tabuada do 6, usando outras tabuadas e relações numéricas. Foi igualmente importante a utilização das propriedades da multiplicação, nomeadamente a relação entre os fatores e o produto, calculando em cadeia e permitiu desenvolver ideias matemáticas bem como a sua relação com procedimentos e representações, na multiplicação.

D1 Esquema de análise de relatos de aula

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo E – Grelhas de progressão (1º e 2º ano de escolaridade)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo F – Grupo focado (voz)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

F1 Esquema de análise do grupo focado

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo G – Inquéritos (inicialmente apresentados, 17)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo H – Validação dos inquéritos

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo I – Inquéritos

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo J – Base de dados (desvio padrão)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo L – Base de dados (totalidade dos inquéritos)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

L1 Resumo das respostas (inquérito)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo M – Análise quantitativa das respostas abertas (inquérito)

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Anexo N – Autorização solicitada aos Encarregados de Educação para a publicação de fotografias, dos seus educandos, durante o trabalho em tarefas matemáticas.

(Documento inserido em formato digital CD-ROM)

Aos Encarregados de Educação

Pedia autorização para apresentar algumas fotografias do vosso(a) educando(a), na realização de tarefas matemáticas, no âmbito do trabalho de uma tese de mestrado.

Aluno: ____

Autorizo ☐

Não autorizo: ☐

Assinatura do Encarregado de Educação; _________________________________

Data: ____________

Obrigado pela vossa colaboração